2 次導関数の利用

数学の目的

- 学生は、2 次導関数を使用して、文章題の最大値と最小値を見つけて検証します。
- 学生は関数の最適化を解き、時間と教師が許す限り、パラメトリック関数を使用してさらに探求します。
- 学生は、IB 数学のコースと最終評価でこれらのトピックを理解する方法と関連付けようとします。

語彙

- 最大化
- 最小化
- 整合性
- 停留点

レッスンについて

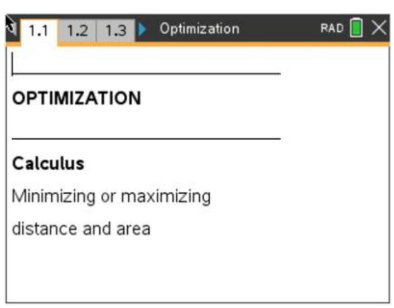
- このレッスンは、IB 数学のカリキュラムに沿ったものです
  応用と解釈 SL/HL と IB 数学
  アプローチと分析 SL/HL (HL にさらに焦点を当てる)
- これは、IB Mathematics Content Topic 5 Calculus に該当します。
  AI 5.7: (a) コンテキスト内の最適化問題。
  AA 5.8:(a) ローカル最大点と最小点。
  (b) 最大点と最小点のテスト。
  (c) 最適化

その結果、学生は次のことを行います。

- この情報を実際の状況に適用します。

このアクティビティでは、2 次導関数を使って文章題の最大値と最小値を見つけ、関数とパラメータ関数の最適化を解く方法を学びます。学生は、手作業やハンドヘルドで機能の重要なポイントを見つけます。

Optimization.tns ファイルを開いて 、このアクティビティをガイドします。



技術的なヒント:

- このアクティビティには、TINspire CX II ハンドヘルドから取得した画面キャプチャが含まれます。また、TI-Nspire ソフトウェアや TI-Nspire アプリなど、TI-Nspire 製品ファミリでの使用にも適しています。ハンドヘルド以外の技術を使用する場合は、これらの方向を若干変更する必要があります。
- 使用している特定のテクノロジーに関する追加のテクニカルヒントをアクティビティ全体で確認してください。
- http://education.ti.com/calcul ators/pd/US/Online- で無料のチュートリアルにアクセス

学習/チュートリアル

レッスンファイル:

学生の活動

Optimization-Student-Nspire.pdf
Optimization-Student-Nspire.doc
Optimization.tns(英語)
Optimization_Soln.tns

©2010-2022 Texas Instruments Incorporated

2 次導関数の利用

教師のヒント: ハンドヘルドにダウンロードするファイルがありますが、このアクティビティはそれなしで実行できます。このファイルは時々役立つビジュアルを提供しますが、このアクティビティは、学生が独自の写真/図を作成することで行うこともできます。

1.2 ページに移動します。
問題 1 – 距離と面積の最適化

1.3 ページで、直線 $y = 4x + 7$ をグラフ化します。直線上に点を配置し、その点から原点までの線分を作成します。クラスメートと、線分の長さと点の座標を見つける方法について話し合います。

1. どの点が原点からの距離を最小化すると思うかを説明してください。

   ディスカッションの可能性: 学生は、原点と線を結ぶ線分が最短距離でどのように垂直になるかについて話し合う必要があります。

2. 最小化しようとしている関数を述べます。

   解答: $d = \sqrt{x^2 + y^2}$

3. 制約を述べます。

   解答: $y = 4x + 7$

4. 1 つの変数の使用を最小化する関数を記述します。

   解答: $d = \sqrt{17x^2 + 56x + 49}$

1.8 ページで、[微分]コマンドと[数値計算]コマンドを使用して、距離を最小化する正確な座標を見つけます。これを行うには、1 次導関数を見つけ、解いて臨界値を見つけ、次に 2 次導関数を見つけて最小値を確認します。

5. 点の X 座標と Y 座標を求めます。

   解答: $\left(\frac{-28}{17}、\frac{7}{17}\right)$ or (-1.65、0.412)

6. 最短距離を求めます。

   解答: $\frac{7\sqrt{17}}{17} \approx 1.698$

2 次導関数の利用

教師からのアドバイス:これは、1 人以上の学生を選んで、微分(メニュー、微積分、微分、または数学テンプレートボタンを使用)と数値計算(メニュー、代数、数値計算)コマンドの使用をプレゼンターとして実演する絶好の機会です。ハンドヘルドの CAS バージョンを使用している場合は、[実行]コマンドを使用できます。また、Function Minimum/Maximum(CAS)または Numerical Function Minimum/Maximum(非 CAS)の使用を実演することもできます。

この次のパートの目標は、

「周囲が 200 メートルで、面積ができるだけ大きい長方形の寸法を見つける」ことです。

1.12 ページで、長方形を作成し、[長さ]ツールを使用して周囲を見つけます。周囲が 200m になるまで長方形のサイズを調整します。次に、[属性] ツールを使用して、周長の計測値をロックします。

教師の留意事項: [長さ] ツールと [属性] ツールを以前に使用したことがない場合は、デモンストレーションが必要になることがあります。

7. 面積を最大化すると思われる寸法を述べます。

   解答: 学生の解答は様々ですが、その可能性について議論を深めるようにしましょう。

8. 最大化しようとしている関数を述べます。 縦を I、横を w とする。

   解答: $A = l \cdot w$

9. 制約を述べます。

   解答: $2l + 2w = 200$

10. 1 つの変数を使用して最大化する関数を記述します。

   解答: $A = 100w - w^2$

[微分]コマンドと[数値計算]コマンドを使用して、面積を最大化する次元を見つけます。

11. 長方形の寸法を求めます。

   解答: 50 m × 50 m

2.1 ページに移動します。

問題 2 – 時間微分問題の最適化 (HL のみ)

2 次導関数の利用

ボートは午後 1 時にドックを出発し、時速 20km で北上します。もう一隻の船が時速 15km で西に向かっている。午後 2 時に同じドックに到着します。目標は、ボートが最も接近していた時間を見つけることです。 時間には t を使用します。

12. 北へ向かうボートの位置関数を求めます。

    解答:　$y = 20t$

13. 西へ向かうボートの位置関数を求めます。

    解答:　$x = 15 - 15t$

教師の留意事項: 与えられた情報に関して、これら 2 つのパラメータ方程式がどのように作成されたかについて、いくらかの時間を費やす必要があるかもしれません。

14. 最小化しようとしている関数を述べます。

    解答:　$d = \sqrt{x^2 + y^2}$

15. 制約を述べます。

    解答:：$x = 15 - 15t$ and $y = 20t$

16. 1 つの変数の使用を最小化する関数を記述します。

    解答: $d = \sqrt{(15-15t)^2 + (20t)^2}$

17. ドメイン制限がある理由を述べます。

    解答:　ボートが 1 時間しか動いていないため、$0 < t < 1$。

[微分]コマンドと[実行]コマンドを使用して、2 隻のボート間の距離が最小になる時間を求めます。

18. 最短距離を求めます。

    解答:　12 km

19. これから発生する時刻を見つけます。t の値を分に変換することを忘れないでください 。

    解答:： 午後 1 時から 21.6 分後、または午後 1 時 22 分頃

2 次導関数の利用

教師からのアドバイス：　問題 2 は、学生がディスカッションをリードし、パラメータ方程式と最適化についての考えや説明を聞くのに最適な場所です。

拡張 – パラメータ関数 (HL のみ)

発射物は、次の パラメータ関数で発射されます。

$X = 500\cos(30°)T$、　$Y = 500\sin(30°)T - 4.9T2$

教師の留意事項：学生がこれらのパラメトリック方程式をグラフ化し、この問題の解決策を見つけるのに役立つ正確なウィンドウを持っていることを確認してください。

20. 発射体が地面に当たる時間を見つけます。

解答：　t ≈ 51.02

21. 発射物が水平に移動する距離を調べます。

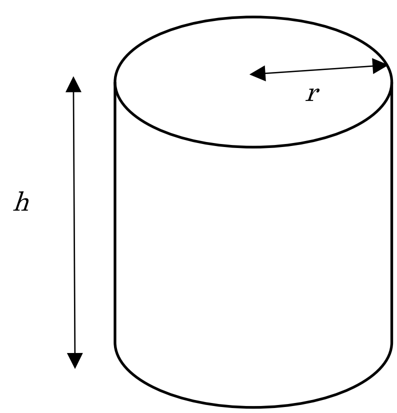
解答：　22,092.48 ユニット

22. 発射物が到達する最大高さを求めます。

解答：　3,188.78 ユニット

IB のさらなる応用

冷凍濃縮オレンジジュースを販売する会社は、コストを節約する缶を製造する必要があります。この円筒形の缶は、r が円形の底面の半径を表し、h が缶の高さを表す下の画像に倣ってモデル化されます。この図は縮尺が合ってない。



2 次導関数の利用

この円柱の半径と高さの合計は 20cm である必要があります。曲面の面積を最大限に生かそうとしている。

(a) 半径(r)で曲面の面積の方程式を求めます。

解答: $A = 2\pi r(20 - r)$ or $A = 40\pi r - 2\pi r^2$

(b) パート a で見つけた方程式の臨界点を見つけます。これらの臨界点が局所的最小値か最大値かを確認します。

解答: $\mathbf{\frac{dA}{dx} = 40\pi — 4\pi r}$

$0 = 40\pi - 4\pi r$

$r = 10$ (学生は第 1 次および第 2 次微分を使用して検証できます)

(c) 曲面の最大面積を求めます。

解答: $r = 10$

$A = 2\pi(10)(20 - 10)$

$AA = 200\pi$ or 628.3185 ...or 628 cm^3

TI-Nspire ナビゲーターのオポチュニティ: *クイック・ポーリング (オープン・レスポンス)*
アクティビティの「問題」のどの部分でも、学生の最適化の理解度をすばやく評価するのに最適な方法です。

教師からのアドバイス: このアクティビティでは、学生同士が話し合ったり、自分の考えをクラスで共有したりする時間がたくさんあることを知っておいてください。ここでの目標は、最適化をレビューして適用するだけでなく、議論を生み出すことです。

***注:この活動はテキサス・インスツルメンツが独自に開発し、IB と連携しています。*
数学のカリキュラムですが、IB™によって承認されていません。IB は、 国際バカロレア機構。