テイラー多項式

教材について

- このレッスンは,IB Mathematics Approaches and Analysis HL のカリキュラムに沿ったものです
- これは，IB Mathematics Content Topic 5 Calculus に該当します。

  5.19a　Maclaurin (Taylor) 級数で ex の拡張を取得する
  sin x、*cos x*、*arctan x*、*LN(1 + x)*、*(1 + x)*^{p}

その結果、学生は次のことを行います。

- 点 x = *a* の周りのn次数の関数 fに対する

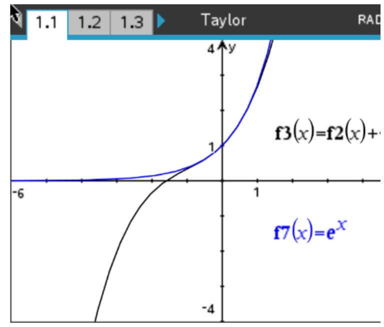
  テイラー多項式近似を定義します。
- テイラー多項式のグラフ収束
- テイラー多項式を使用して関数値を近似する

語彙

- テイラー多項式
- 階乗
- 微分

教師の準備とメモ

- テイラー多項式近似は、接線近似の一般化として導入されます。グラフ作成ハンドヘルドは、関数のテイラー多項式近似をグラフ化するためのツールとして使用されます。テイラー多項式は、特定の関数値を近似するためにも使用されます。
- 学生は、接線近似と高次微分に精通している必要があります。
- 関数 f が与えられた場合、学生は点 x = a の次数のテイラー多項式近似を求め、テイラー多項式を使用して特定の関数値を近似し、テイラー多項式を使用して関数のグラフを近似できる必要があります。



技術的なヒント:

- このアクティビティには、TI-Nspire CX II ハンドヘルドから取得した画面キャプチャが含まれます。また、TI-Nspire ソフトウェアや TI-Nspire アプリなど、TI-Nspire 製品ファミリでの使用にも適しています。ハンドヘルド以外の技術を使用する場合は、これらの方向を若干変更する必要があります。
- 使用している特定のテクノロジーに関する追加のテクニカルヒントをアクティビティ全体で確認してください。
- http://education.ti.com/calculators/pd/US/Online-Learning/Tutorials で無料のチュートリアルにアクセス

関連資料:

- テイラー Polynomials_Student-Nspire.pdf
- テイラー Polynomials_Student-Nspire.doc

テイラー多項式

紹介：

以下の関数について考えてみましょう。

$y = 5x^3 - 3x^2 + 7x - 4$　　$y = \text{atan}(x + \ln(x))$　　$y = \frac{4x^2+8x-5}{2x^3+x^2-15}$　　$y = \sec\left(e^{2x} - \frac{4}{x}\right)$

　最初の関数である多項式関数は、おそらく積分が簡単です。多項式には多くの項を含めることができますが、その基本構造は、数値(係数)と独立変数xの非負の整数乗の積の合計です。xの整数の累乗は繰り返し乗算の省略形にすぎないため、4 つの電卓の機能のプラス、時間、および負のボタンのみを使用して、特定の値xで多項式を評価できます。

実際、多項式は非常に操作しやすいため、より複雑な関数の近似として求められています。多項式回帰を伴う統計で、そのような種類の近似に遭遇したことがあるかもしれません。多項式回帰の特殊なケースは、データ点の散布図に対する "最適な線" y = ax + b です。

このアクティビティでは、接線近似の一般化である別の種類の多項式近似を調べます。これらの多項式はテイラー多項式と呼ばれます。

探求

関数の導関数$f'(a)$ がグラフ上の点 $(a, f(a))$ でわかっている場合、接線の方程式の接点での傾きとして使用できます。$m = f'(a)$として y が独立して$y - f(a) = f'(a)(x-a)$ は $y = f(a) + f'(a)(x-a)$です。

接線近似は、点 x = a で f と同じ y の値と同じ微分の値を持つ唯一の直線であるため、点 x = a における関数 f に対する最良線形局所近似と呼ばれることがあります。言い換えると、接線は関数の値とx = a におけるその 1 次導関数の値と一致します

接線近似は、点 $y = f(a) + f'(a)(x-a)x = a$ の周りの関数 f に対する 1 次テイラー多項式近似です。高次テイラー多項式近似を得るには、高次の微分値を一致させる必要があります。

例えば、x = 0における $y = f(x) = e^x$ の最適な 2 次近似を見つけるには、y、$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$、$\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}$ とが$x = 0$ における関数$f(x) = e^x$の導関数の値と一致するような 2 次関数$y = ax^2 + bx + c$を見つける必要があります。係数 a、b,　c を解くために一致させる必要のある計算は、以下の表の行にまたがって配置されています。

$y(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	$y(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$	$f(x) = e^x$	$f(0) = e^0 = 1$	$\rightarrow c = 1$
$y'(x) = 2a \cdot x + b$	$y'(0) = 2a \cdot 0 + b = b$	$f'(x) = e^x$	$f'(0) = e^0 = 1$	$\rightarrow b = 1$
$y''(x) = 2a$	$y''(0) = 2a$	$f''(x) = e^x$	$f''(0) = e^0 = 1$	$\rightarrow a = \frac{1}{2}$

$y = \frac{x^2}{2} + x + 1$は 2 次近似です。

テイラー多項式の項は累乗の増加で書くのが通例なので、

テイラー多項式

x $=0$ $f(x)=e^x$への 2 次テイラー多項式近似は、次のようになります。

$$y=1+x+\frac{x^2}{2}$$

一般に、 点 x = 0 の周りの関数 f の次数 n テイラー多項式近似は次式で与えられます。

$$P_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ここで、 $f^{(n)}$はfの n 次導関数 を表し、$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$ はn 階乗 です。

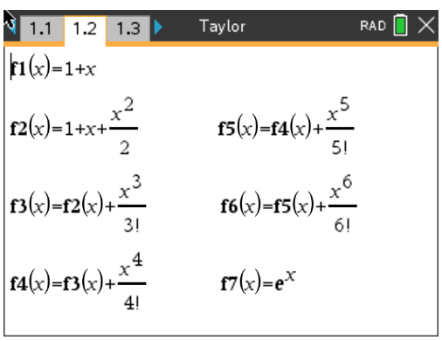
x = 0における $f(x)=e^x$ のテイラー多項式近似 は、f のすべての高次導関数が$f^{(n)}(x)=e^x$ とまったく同じ、つまりすべての n に対して$f^{(n)}(0)=1$とまったく同じであるため、特に簡単に見つけることができます。 したがって、 x = 0 の 6 次テイラー多項式 $f(x)=e^x$ は次のようになります。

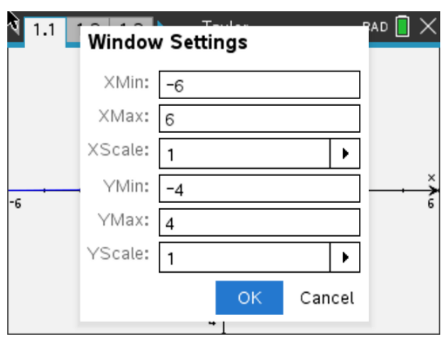
$$P_6(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}$$

上記の例は、これらの高次テイラー多項式近似が接線近似よりも単に優れた局所近似である、つまり、近似は点の周りの非常に短い区間のみで使用されるべきであると信じ込ませるでしょう。すべてのケースではありませんが、多くの場合、高次テイラー多項式は、はるかに長い間隔で関数の非常に優れた近似を提供する場合があります。これを説明するために、関数とそのいくつかのテイラー多項式をグラフ化してみましょう。

$f(x)=e^x$グラフとその第1次から第6次テイラー多項式(x = 0)下の覗き窓をご利用ください。

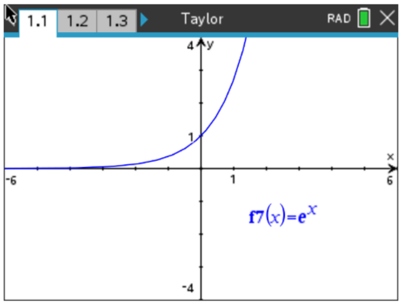
グラフページに1次テイラー多項式$\boldsymbol{f1(x)}$、2次テイラーの多項式$\boldsymbol{f2(x)}$、以下同様、 $f(x)$の 6 次テイラー多項式$\boldsymbol{f6(x)}$までを入力します。$\boldsymbol{f7(x)}$に、元の関数f(x) $=e^x$を入力します。以下の画面は、これらのエントリを示しています。



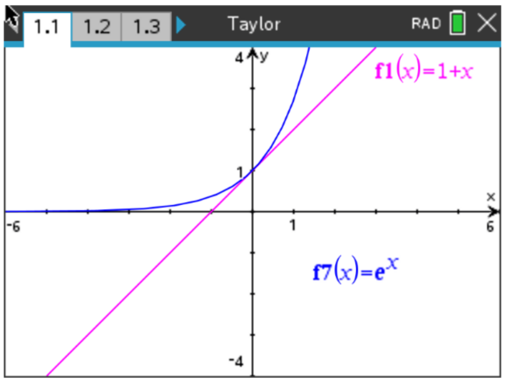


テイラー多項式の次数が増加するたびに、前のテイラー多項式に項を追加するだけでよいことに注意してください。($\boldsymbol{f7(x)}$)のグラフを下図に示す。

テイラー多項式

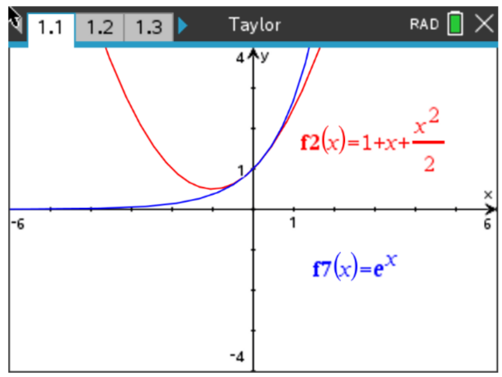


グラフは、最初の 6 つのテイラー多項式を $f(x) = e^x$ と同じウィンドウにグラフ化して示しています。



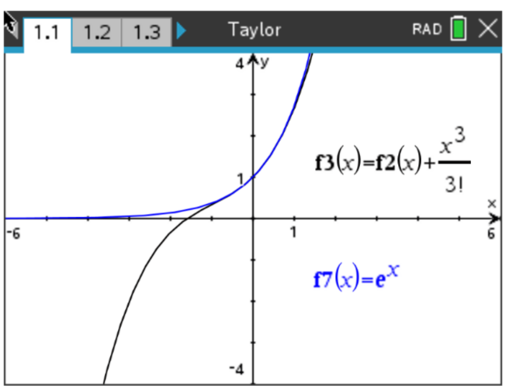
$f1(x) = 1 + x$

$f7(x) = e^x$



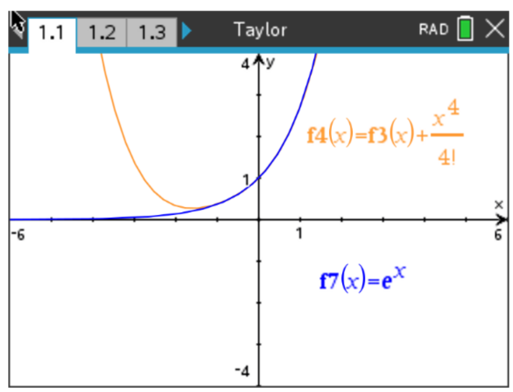
$f2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$

$f7(x) = e^x$



$f3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

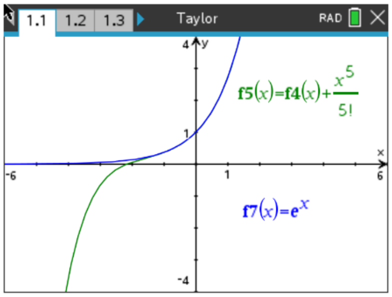
$f7(x) = e^x$

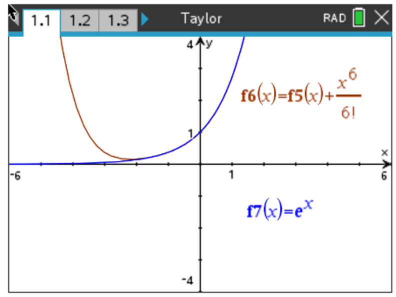


$f4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$

$f7(x) = e^x$

テイラー多項式





$f5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$
$f7(x) = e^x$

$f6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$
$f7(x) = e^x$

多項式のグラフが、x = 0 の周りの間隔がどんどん広くなるにつれて、$f(x) = e^x$のグラフを視覚的に近似していることに注目してください。x = 1 の十字線までトレースし、2 つの関数の値を比較すると、数値近似がどれだけ近いかがわかります。

$\boldsymbol{f7(1)}$ = 2.718281828 (小数点以下第 9 位に四捨五入)

$\boldsymbol{f6(1)}$ = 2.718055556 (1000 分の 1 の精度)

点 x =a の周りの関数 f のn次数テイラー多項式近似は (x – a) の累乗で展開され、次の形式になります。

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

最初の 2 つの項は、接線の近似を正確に与えます。(x – a) の累乗は一見必要ないように思えるかもしれませんが、x = 0 で定義されていない関数を考えると 、他の点を中心に展開する必要があることがわかります。

関数 $f(x)$ = ln(x) は x = 0 に対して定義されていませんが、代わりに x = 1 に関するテイラー多項式を見つけることができます。必要な導関数情報を次に示します。

$f(x) = \ln(x)$ $\qquad$ $f(1) = \ln(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$

$f''(x) = \frac{-1}{x^2}$ $\qquad$ $f''(1) = \frac{-1}{1^1} = -1$

$f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{x^3}$ $\qquad$ $f'''(1) = \frac{2}{1^3} = 2$

$f^{(4)}(x) = \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}$ $\qquad$ $f^{(4)}(1) = \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3}{1^4} = -3! = -6$

$\vdots$

$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{x^n}$ $\qquad$ $f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{1^n}$

$= (-1)^{n-1}(n-1)!$

テイラー多項式

x = 1 に関する f(x) = ln(x) の n 次テイラー多項式 は、次のようになります。

$$P_n(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

$$= 0 + (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{3}{4!}(x-1)^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n$$

$$= \ (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

次のページの各機能について:

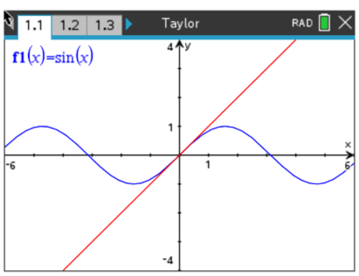
a.　次の関数のテイラー多項式で近似を求めます。

b.　前の同じ表示ウィンドウを使用して、各テイラー多項式近似をグラフ化します。例を元の関数と一緒に使用します。用意された画面にグラフをスケッチし、それぞれのテイラー多項式は元の関数と比較します。

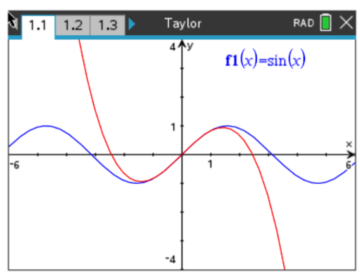
c.　元の関数と各テイラー多項式近似を $x = 3$ で評価します。

問題点1
$f(x) = \sin(x)$

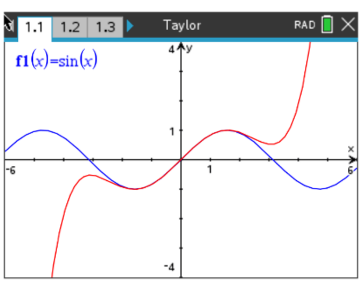
x = 0 について検索してグラフ化します。$P_1(x), P_3(x), P_5(x), P_7(x), P_9(x), and\ P_{11}(x)$



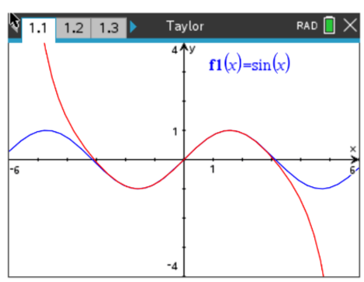
$P_1(x) = \boldsymbol{x}$



$P_3(x) \ = \ \boldsymbol{x} - \frac{x^3}{3!}$

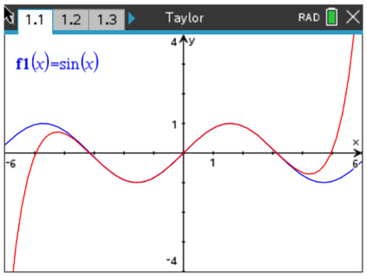


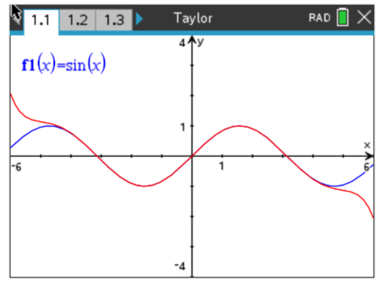
$P_5(x) = \boldsymbol{x} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$



$P_7(x) \ = \boldsymbol{x} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$

テイラー多項式





$P_9(x) =$ $= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} P_{11}(x) x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$

$f(3) =$ ____**0.1411200081**____________

$P_1(3) =$ ____**3**______________________ _____$P_3(3) =$**-1.5**_________________

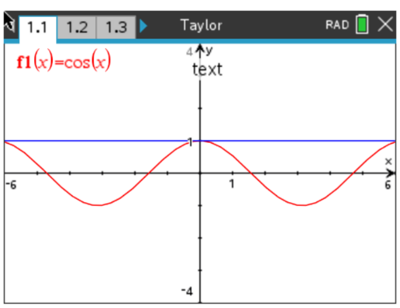
$P_5(3) =$ ____**0.525**_________________ _____$P_7(3) =$**0.0910714286**_________

$P_9(3) =$ ____**0.1453125**______________ _____$P_{11}(3) =$**0.1408745942**_________

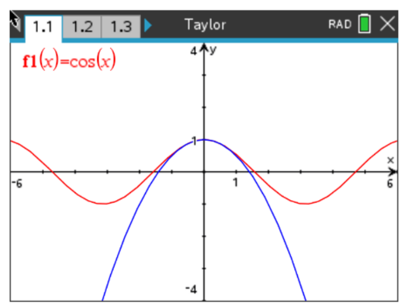
問題2 -
$f(x) = \cos(x)$

x = 0 について検索してグラフ化します。$P_0(x)$, $P_2(x)$, $P_4(x)$, $P_6(x)$, $P_8(x)$, *and* $P_{10}(x)$

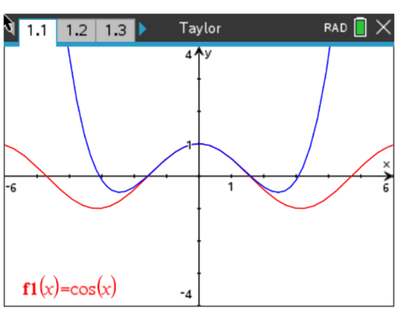
注: P_0(x) x = 0 での関数出力のみを使用し、定数関数になります。
言い換えれば、そのグラフは水平線になります。



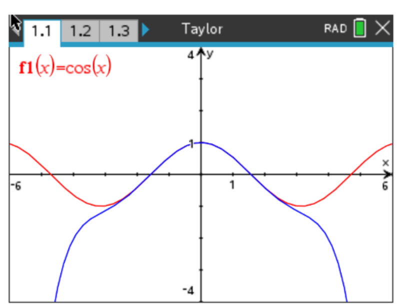
$P_0(x) = 1$



$P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$

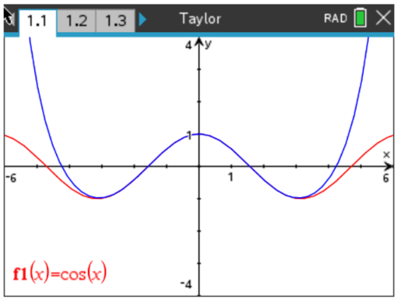


$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

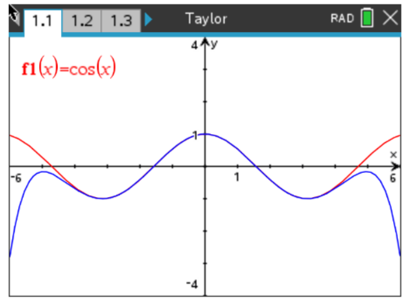


$P_6(x) \;= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$

テイラー多項式



$P_8(x) = \mathbf{1} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$



$P_{10}(x) = \mathbf{1} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!}$

$f(3) =$ ___-0.9899924966___________

$P_0(3) =$ ____1_____________________ ____$P_2(3) =$-3.5________________

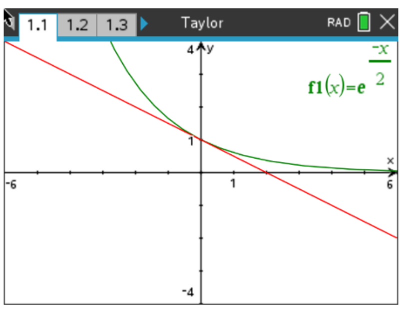
$P_4(3) =$ ____-0.125________________ ____$P_6(3) =$-1.1375_______________

$P_8(3) =$ ____-0.9747767857__________ ___$P_{10}(3) =$-0.991049107__________

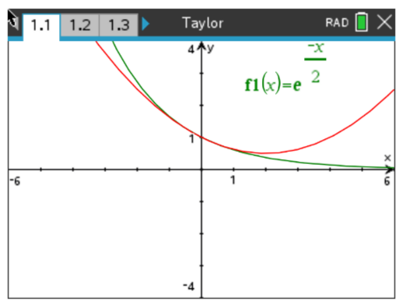
問題3

$f(x) = e^{-x/2}$

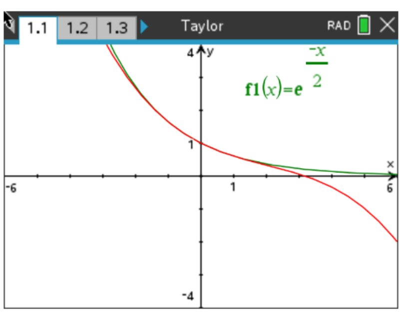
x = 0 について検索してグラフ化します。$P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$, $P_5(x)$, and $P_6(x)$



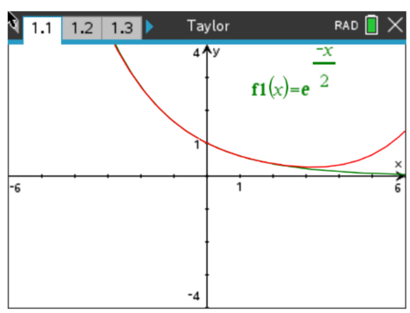
$P_1(x) = \mathbf{1} - \frac{x}{2}$



$P_2(x) = \mathbf{1} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!}$

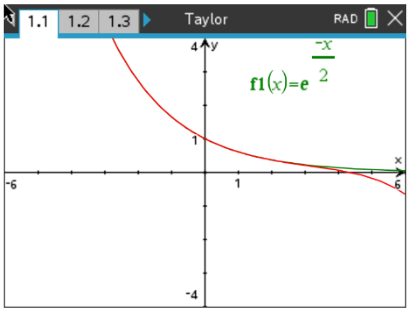


$P_3(x) = \mathbf{1} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!}$

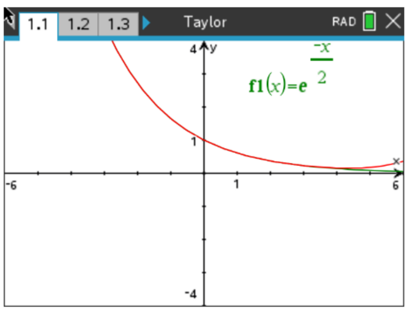


$P_4(x) = \mathbf{1} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 4!}$

テイラー多項式



$$P_5(x) = \mathbf{1} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 4!} - \frac{x^5}{2^5 \cdot 5!}$$



$$P_6(x) = \mathbf{1} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 4!} - \frac{x^5}{2^5 \cdot 5!} + \frac{x^6}{2^6 \cdot 6!}$$

$f(3) =$ ____**0.2231301601**____________

$P_1(3) =$ ___**-0.5**____________________ ____$P_2(3)$ =**0.625**_________________

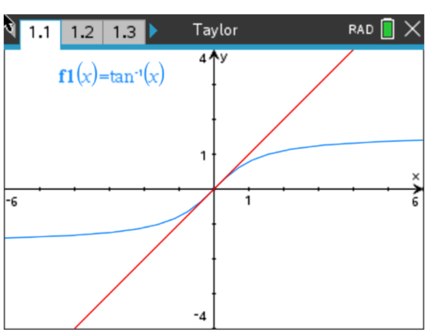
$P_3(3) =$ ____**0.0625**_________________ ____$P_4(3)$ =**0.2734375**_____________

$P_5(3) =$ ____**0.21015625**_____________ ____$P_6(3)$ =**0.2259765625**__________

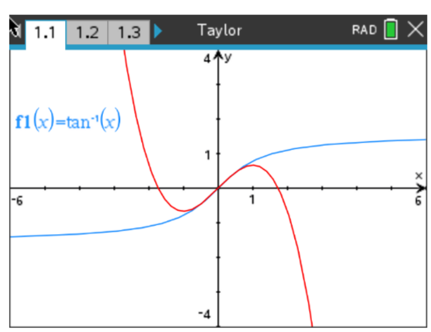
教師の留意事項:テイラー多項式$f(x) = e^{-x/2}$は、この活動で説明したxの代わりに-x/2を代入することによっても得ることができる。

問題4 -
$f(x) = \arctan(x)$

x = 0 について探索してグラフ化します。$P_1(x)$, $P_3(x)$, *and* $P_5(x)$

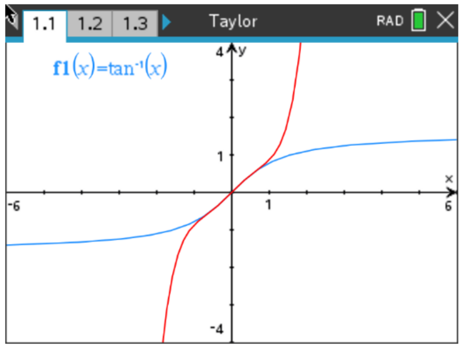


$P_1(x) = \ \boldsymbol{x}$



$P_3(x) = \boldsymbol{x} - \frac{x^3}{3}$

テイラー多項式



$P_5(x) = \ \boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x^3}}{\boldsymbol{3}} + \frac{\boldsymbol{x^5}}{\boldsymbol{5}}$

$f(3) =$ ____**1.249045772**______________$P_1(3) =$ __**3**______________________

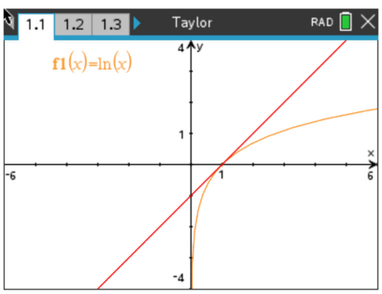
$P_3(3) =$ ___**-6**______________________ ____$P_5(3) =$ **42.6**_________________

教師の注意：arctan(x)のテイラー級数は収束が非常に遅いです。

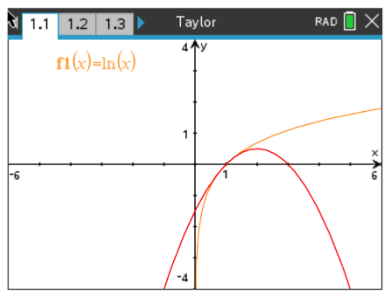
問題5 -

$f(x) = \ln(x)$

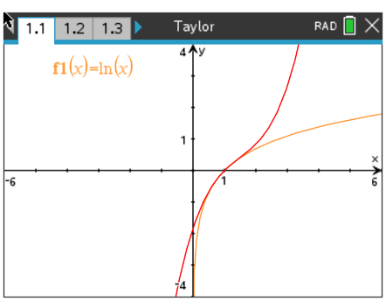
x = 1 について検索してグラフ化します。$P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$, $P_5(x)$, *and* $P_6(x)$



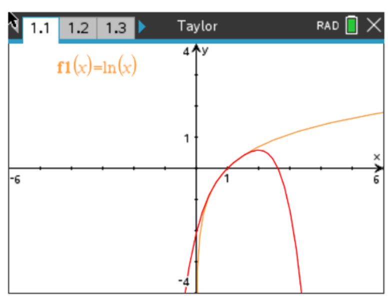
$P_1(x) = \mathbf{x - 1}$



$P_2(x) = \ \boldsymbol{(x-1)} - \frac{\boldsymbol{(x-1)^2}}{\boldsymbol{2}}$

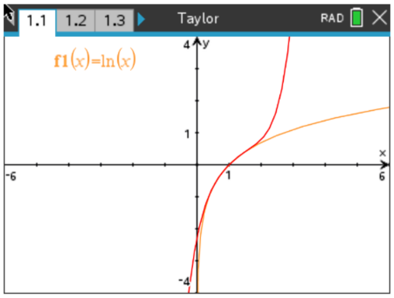


$P_3(x) = \ \boldsymbol{(x-1)} - \frac{\boldsymbol{(x-1)^2}}{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{(x-1)^3}}{\boldsymbol{3}}$

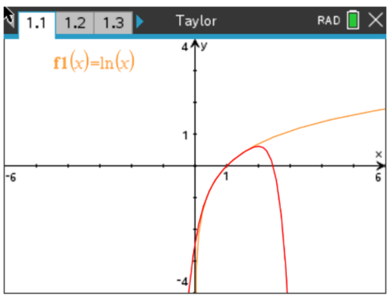


$P_4(x) \ = \boldsymbol{(x-1)} - \frac{\boldsymbol{(x-1)^2}}{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{(x-1)^3}}{\boldsymbol{3}} - \frac{\boldsymbol{(x-1)^4}}{\boldsymbol{4}}$

テイラー多項式



$$P_5(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5}$$



$$P_6(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^6}{6}$$

$f(3) =$ ___1.098612289______________

$P_1(3) =$ ___2______________________ ____$P_2(3)$ =0____________________

$P_3(3) =$ ___2.666666667_____________ ____$P_4(3)$ =-1.333333333333_________

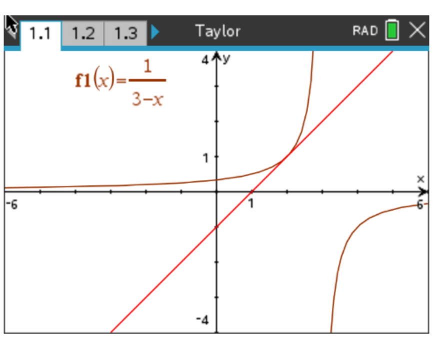
$P_5(3) =$ ___5.0666666667_______________$P_6(3)$ =-5.6_________________

教師からのヒント：x = 3 という値は、f(x) = ln(x) に対するテイラー多項式の収束区間のすぐ外側にあります (収束区間は 0 < x ≤ 2 です)。この収束区間内にある x の別の値 (x = 3/2 など) を近似するために得られた数値結果を比較できます。

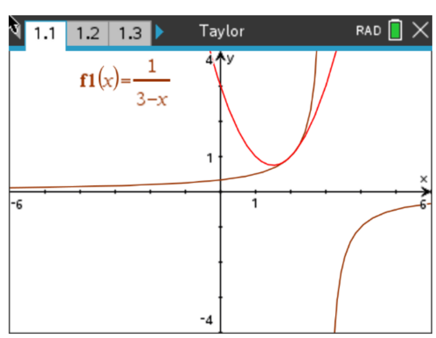
問題6 -

$$f(x) = \frac{1}{3-x}$$

x = 2 について探索してグラフ化します。$P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x),\ P_4(x),\ P_5(x),\ and\ \ P_6(x)$

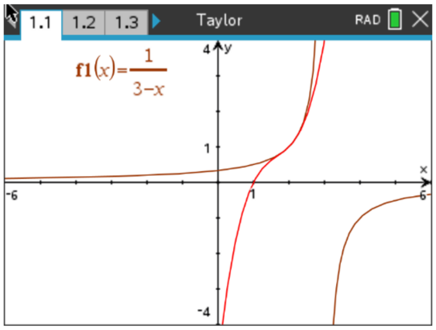


$P_1(x) = 1 + (x-2)$

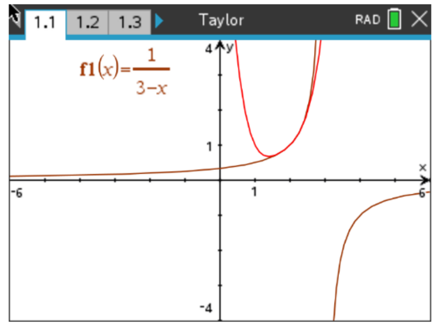


$P_2(x) = 1 + (x-2) + (x-2)^2$

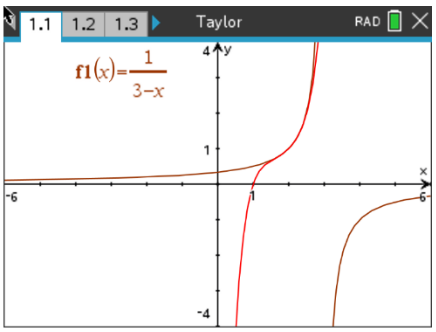
テイラー多項式



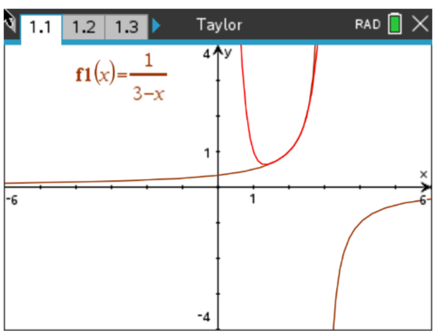
$P_3(x) = 1 + (x - 2) + (x - 2)^2 + (x - 2)^3$



$P_4(x) = 1 + (x - 2) + (x - 2)^2 + (x - 2)^3 + (x - 2)^4$



$P_5(x) = 1 + (x - 2) + (x - 2)^2 + (x - 2)^3 + (x - 2)^4 + (x - 2)^5$



$P_6(x) = 1 + (x - 2) + (x - 2)^2 + (x - 2)^3 + (x - 2)^4 + (x - 2)^5 + (x - 2)^7$

$f(3) =$ ___**undefined** です________________

$P_1(3) =$ ____**2**____________________ _____$P_2(3) =$**3**__________________

$P_3(3) =$ ____**4**____________________ _____$P_4(3) =$**5**__________________

$P_5(3) =$ ____**6**____________________ _____$P_6(3) =$**7**__________________

教師からのアドバイス: x = 3 という値は、f(x) = 1/(x – 3) のテイラー多項式の収束区間のすぐ外側にあります (収束区間は 1 < x < 3 です)。この収束区間内にある x の別の値 (x = 3/2 など) を近似するために得られた数値結果を比較できます。実際、これらのテイラー多項式を使用して、x = 3 で定義されていない関数の値を近似することは意味がありません。また、f(x) = 1/(x – 3) のテイラー多項式は、幾何和のシーケンスを表し、等比級数との接続に使用できます。これらのテイラー多項式の収束区間は、対応する等比級数が収束する x の値に正確に対応します。

テイラー多項式

***注:このアクティビティはテキサス・インスツルメンツが独自に開発し、IB 数学カリキュラムに沿っていますが、IB™が承認しているわけではありません。IB は、国際バカロレア機構が所有する登録商標です。*