運動学による距離と変位，速度・加速度と微分

数学の目的

- 学生は運動学を使用しながら、微分、積分、粒子運動の間のグラフおよび代数的関係について話し合います。
- そして、この粒子の知識を現実世界の状況に応用します。
- 学生は、IB 数学のコースと最終評価でこれらのトピックを理解する方法と関連付けようとします。

語彙

• 変位	• 速度	• 加速度
• 運動学	• 微分	• 統合

レッスンについて

- このレッスンは、IB 数学の応用と解釈 HL および IB 数学のアプローチと分析 SL / HL のカリキュラムに沿っています
- これは，IB Mathematics Content Topic 5 Calculus　に該当します。

  5.9 (AA のみ)変位 s、速度 v、加速度 a、および総移動距離を含む運動学の問題。

  5.13 (AI HL のみ)変位 s、速度 v、加速度 a を含む運動学問題。

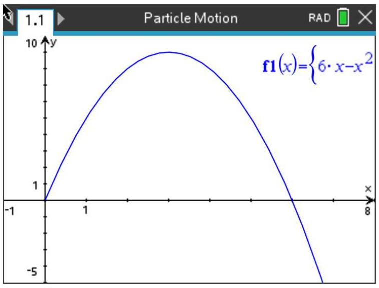
  その結果、学生は次のことを行います。
  - この情報を実際の状況に適用します。

　このアクティビティを始めるには、運動学の簡単な説明が有益です。簡単に言えば、運動学は物体の運動の特徴または特性です。運動学に関連する 3 つの単語は、変位、速度、加速度です。s は時間 t における固定原点からの物体(または粒子) 距離の変位です。 v は時間 t における粒子の速度です。 a は時間 t における粒子の加速度です。

　粒子の変位、速度、加速度の関係をすでに知っているはずですが、このアクティビティを通じてそれらのスキルを確認します。

復習

(a) 粒子の変位方程式を使用すると、粒子の速度方程式を見つけるのにどのように役立つかについて
クラスの学生と話し合います。また、粒子の速度方程式を使用すると、粒子の加速度方程式を見つけるのにどのように役立つかについても説明します。結果をクラスで共有します。



技術的なヒント:

- このアクティビティには、TI-Nspire CX II ハンドヘルドから取得した画面キャプチャが含まれます。また、TI-Nspire ソフトウェアや TI-Nspire アプリなど、TI-Nspire 製品ファミリでの使用にも適しています。ハンドヘルド以外の技術を使用する場合は、これらの方向を若干変更する必要があります。
- 使用している特定のテクノロジーに関する追加のテクニカルヒントをアクティビティ全体で確認してください。
- http://education.ti.com/calculators/pd/US/Online-Learning/Tutorials で無料のチュートリアルにアクセス

レッスンファイル:
学生の活動
距離 vs. ディスプレイスメント A パーティクル journey_Student-Nspire.pdf
距離 vs. ディスプレイスメント A パーティクル journey_Student-Nspire.doc

考えられる論点: 粒子の変位方程式の導関数を取ることで速度方程式を見つけることができ、粒子の速度方程式の導関数を取ることで、その加速度方程式を見つけることができます。その速度は、距離に対する時間の微小の変位の変化率です。その加速度は、粒子の速度の変化率です。

(b) 粒子の加速度方程式と境界条件を使用すると、速度方程式を見つけるのにどのように役立つかについてクラスメートと話し合います。また、粒子の速度方程式と境界条件を使用して、変位方程式を見つけるのにどのように役立つかについても説明します。 結果をクラスで共有します。

考えられる論点: 加速度方程式を積分することで速度方程式を求め、速度方程式を積分することで変位方程式を求めることができます。また、曲線と x 軸の間の面積を見つけることで、変位と総距離を見つけることができます。

結果が共有されたら、次の空欄に記入します。

$s(t)$	$s(t) = \ \int \boldsymbol{v(t)\,dt}$
$v(t) = \ \boldsymbol{s'(t)}$	$\boldsymbol{v(t)} = \ \int \boldsymbol{a(t)\,dt}$
$a(t) = \ \boldsymbol{s''(t)} \ = \ \boldsymbol{v'(t)}$	$a(t)$

では、移動量と移動距離の違いは何ですか? その点を探ってみましょう。

教師からのアドバイス: 変位と距離の議論を始めるのに良い場所ですが、完全な説明は問題 1 と 2 で行うことができます。

課題 1 粒子 A は直線上を移動し、t 秒後の固定原点からの変位 s はメートルで与えられます。

$$s(t) = 6t - t^2 \qquad 0 \ \leq t \ \leq 8$$

粒子 A は原点から始まり、t = q のときに再び原点を通過します。粒子 A は、$t = r$ のときに方向を変えます。粒子 A が移動する合計距離は d で与えられます。

(a) (i) 1 秒後の粒子 A の位置、速度、加速度を求める。クラスメートと話し合う
これらの各解答が粒子 A に関して何を意味するか。 結果をクラスで共有します。

解答： $s(t) = 6t - \ t^2$ $\qquad s(1) = 6(1) - (1)^2 = \ 5\,m$

考えられる議論:1 秒後、粒子は 開始点(原点)の右 5m にあります

$s'(t) = v(t) = 6 - 2t \qquad v(1) = 6 - 2(1) = 4\,ms^{-1}$

考えられる考察: 1 秒後、粒子は 原点の右側に 4 ms^{-1} で移動します

$s''(t) = v'(t) = a(t) = \ -2 \qquad a(1) = \ -2\,ms^{-2}$

考えられる議論: 1 秒後、粒子の速度は負の方向に変化しています

(ii) 粒子 A が $t = 1$ で加速しているか減速しているかを判断します。理由を説明してください。

解答: 粒子は t = 1 で減速します。
速度は正で加速度は負であるため、反対の符号は粒子の速度を低下させます。

(b) q の値を求めます。クラスメートと一緒に、この q の値が粒子 A について何を意味するかの重要性と、q の値を見つけるために使用される数学について話し合います。結果をクラスで共有します。

解答: 粒子は q の値で再び原点を通過するため、変位をゼロに設定して t を解きます。

$$s(t) = 0 \qquad 6t - t^2 = 0 \qquad t(6-t) = 0 \qquad t = 0\ and\ t = 6$$

0 秒と 6 秒では、微小量の変位は 0 になります。

(c) 粒子 A が加速している間隔と減速している間隔を見つけます。クラスメートと、結論を出すために使用した数学について話し合います。結果をクラスで共有します。

解答: 加速度の符号が変化する場所を見つけ、これらの符号を、そのうちの 1 つが変化する各間隔での速度の符号と比較する必要があります。符号が同じ場合、粒子は加速しており、符号が異なる場合、粒子は減速しています。チャートをご覧ください。

t	*t<3*	*t>3*
v	＋	−
a	−	−

$0 < t < 3$ から速度の微小量は減速し、 $3 < t < 8$ から速度の微小量は加速する。

(d) (i) r の値を求める。クラスメートと、この r の値が 粒子について何を意味するかの重要性と、r の値を見つけるために使用される数学について話し合います。結果をクラスで共有します。

解答: 微小量は r で移動/方向転換していないため、速度をゼロに設定し、
変位方程式の極大値 (2 方程式の頂点) を解くか見つけます。

$$v(t) = 0 \qquad 6 - 2t = 0 \qquad t = 3 \ \therefore\ \ r = 3$$

(ii) t = r のときの原点からの粒子 A の変位を求める。

解答: $s(3) = 6(3) - 3^2 = 9\,m$ または $\int_0^3 v(t)\,dt = \int_0^3 (6-2t)\,dt = [6t - t^2]_0^3 = 9\,m$

(e) t = 8 のときの原点からの粒子 A の距離を求める。

解答: $s(8) = 6(8) - (8)^2 = -16 = 16\,m$（原点の左側）

(f) d の値を見つけます。クラスメートと粒子の変位の違いについて話し合うことと
粒子の合計距離。結果をクラスで共有します。

解答: 合計距離を見つけるには、 $\int_0^8 |v(t)|\,dt \therefore \int_0^8 |6-2t|\,dt = 34\,m$

また、原点から粒子を表すターニングポイント($t = 3$)までの距離を見つけることもできます
今後、原点に戻って 2 倍にし、それを *s(8)*と組み合わせると、*9 + 9 + 16 = 34 m になります。*

議論のポイント: 変位は特定の点を基準にして測定され、直線です
始点(原点)から終点まで。これは、2 点間の最短距離です。トータル
距離は、実際にカバーされた地面(前方/後方)を測定し、常に正の値です。

(g) 第 2 の粒子 B は、速度が次式で与えられるように、同じ直線に沿って移動します。
$v(t) = 8 - 2t$ 対して。$t \geq 0$ $t = p$ の場合、B が移動した距離は d に等しくなります。
p の値を求めます。
移動距離を見つけるために速度をどのように使用するかについてクラスメートと話し合います。
あなたの共有した 結果をクラスに置き換えます。

解答: 粒子距離が等しいときの p の時間を見つけるには、粒子 B の速度の絶対値とし、それを部分(f)の答え(34 m)に等しく設定しますが、 粒子 B がその距離に到達するまでどのくらいの時間がかかるかわからない場合は、絶対を分割する必要があります。
積分を 2 つの部分に値し、その時間 p を解きます。まず、速度はゼロに等しく、t を解く。

$$8 - 2t = 0 \quad t = 4$$
$$\int_0^4 (8 - 2t)dt + \int_4^p (2t - 8)dt = 34$$
$$16 + p^2 - 8p + 32 = 34$$
$$p^2 - 8p - 2 = 0$$
$$\boldsymbol{p = 4 + 3\sqrt{2}}$$

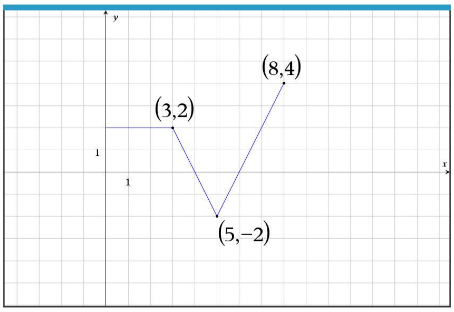
反応
クラスメートと、TI-Nspire テクノロジーがどのように役立ったか、
または実際に役立ったかについて話し合います。

問題 1 の回答プロセス。結果をクラスで共有します。

考えられる論点: 数学テンプレート画面を使用して、導関数、定型(および不定)積分、絶対値。グラフを使用して最大値と最小値を見つける。グラフも使用をクリックして、零点を見つけることで、微小寮の方向が変わる場所、または原点を通過する場所を見つけます。

教師からのアドバイス: 問題 1 は、微分と積分の両方の視点から運動学を大々的に復習するものです。
教師が、反応を待つだけでなく、TI-Nspire CX II を使用してこれらの部分のいくつかを行う方法を実演すると便利です。これは、試験時間に表れる大きな時間の節約になります。

課題 2 線に沿って移動する粒子の速度 は、$v\,ms^{-1} 0 \leq t \leq 8$ に対して次のように示されます。
ダイアグラム：



(a)　t = 4 のときの粒子の加速度を求めます。これをどのように見つけるかについてクラスメートと話し合って下さい。速度グラフが与えられます。結果をクラスで共有します。

解答: 加速度が速度の変化率であることを知っているので、速度グラフを使用して、4 秒で時間を通過する線の傾きを見つけます。

$$slope\ (rate\ of\ change) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{-2-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

(b) 粒子が右に移動する間隔を書き留めます。
　学生は、速度グラフでわかる方法を話し合います。結果をクラスで共有します。

解答: 速度が正または x 軸より上にある場合、微小量は右に移動します。
グラフを見てこれらの間隔は　$0 < t < 4$ and $6 < t < 8$、または$(0, 4)$ and $(6, 8)$ です。

(c) 8 秒後の粒子の変位を表す定積分を計算し、この変位を見付けます。

解答： $\int_0^8 v(t)dt\ =\ Area_1 - Area_2 + Area_3\ =\ 7 - 2 + 4 = 9\ m$

(d)　 $0 \le t \le 8$の総移動距離を表す定積分を式で表わす。この合計距離を求めます。

解答： $\int_0^8 |v(t)|\ dt = Area_1 + Area_2 + Area_3 = 7 + 2 + 4 = 13\ m$

(e)　移動距離と移動距離の違いについてクラスメートと話し合います。結果をクラスで共有します。

解答:　 問題 1 で述べたように、変位は特定の点を基準にして測定されます。
　　　始点(原点)から終点までの直線です。これは、2 点間の最短距離です。
　　　距離は、実際に移動した地面(前方/後方)を測定し、正の値のみにすることができます。

課題 3
　直線上を移動する粒子の速度 は、秒で与えられます。 $v\ ms^{-1} v(t) = t^2 - 25t\ \ge 0$

(a)　t =3 における粒子の加速度を求めます。

解答： $a(t) = 2t \qquad a(3) = 2(3) = 6\ ms^{-2}$

(b) 粒子の初期変位は 8 m です。 時間 t における粒子の変位の式 s *を求めます*。

解答： $\int v(t)dt = s(t)$

$$\int (t^2 - 25)\,dt = \frac{1}{3}t^3 - 25t + C$$

C を解くには、8 m の変位の初期条件を使用します。

$$8 = \frac{1}{3}(0)^3 - 25(0) + C$$

$$C = 8$$

$$s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 25t + 8$$

(c) 時間 3 秒から 6 秒の間の移動距離を求めます。

解答： $\int_3^6 |t^2 - 25|\,dt = 22.66666\ldots \approx 26.7\ m$

粒子以外の用途

1.) 子供のスリングショットは、空中に水風船を打ち上げます。 初速と初期高さで空中に打ち上げられる水風船の高さ h m は、 が気球が打ち上げられてから経過した時間 (秒単位) の関数によってモデル化できます。で地上から水風船が打ち上げられます。気球が到達する最大高度と、風船が再び地面にぶつかるまでの経過時間を見つけます。$v_o h_o h(t) = \ h_o + \ v_o(t) - 4.9t^2 t v_o = 50\ \ ms^{-1}$

解答： 方法 1

高さ関数に代入したら、その導関数を求め、これをゼロに設定して解きます。

$$h(t) = 0 + 50t - 4.9t^2$$

$$h'(t) = 50 - 9.8t$$

$$0 = 50 - 9.8t$$

$$t \approx 5.10 \ \ \therefore \ \max height \approx 128\ m$$

方法 2

関数をグラフ化し、Nspire CX II を使用して、メニュー$h(t)$の[グラフ]で最大値を見つけます。

$$(5.10, 128) \ \therefore \ \max height \ \approx 128\ m$$

2.) ダイビング選手権では、チームメンバーがプールの上の飛び込み台から飛び降ります。
ボードを離れてから数秒後に、チーム メンバーのプールの表面からの高さ (メートル) を
関数$s(t) = 12 + 4t - \ t^2$でモデル化できます。

次のことを見付けなさい：

(a) 飛び込み台がプールの水面からの高さ。

解答： $s(0) = 12 + 4(0) - (0)^2 = 12\ m$

(b) 人がボードを離れてから水に当たるまでの時間。

解答： $0 = 12 + 4t - t^2$

$0 = t^2 - 4t - 12$

$0 = (t-6)(t+2)$

$t = 6\ and - 2$

したがって、水に当たるのに 6 秒かかります。

(c) 水との衝突時のダイバーの速度と加速度。問題のコンテキストでこれらを解釈します。

解答： $s(t) = 12 + 4t - t^2$ $v(t) = 4 - 2ta(t) = -2$

$v(6) = 4 - 2(6)$ $a(6) = -2\ ms^{-2}$

$v(6) = -8\ ms^{-1}$

速度 が$-8\ ms^{-1}$ の場合、ダイバーは下向きに進み、$8\ ms^{-1}$ で水面にぶつかります。
加速度が$-2\ ms^{-2}$ の場合、速度と加速度の符号が 6 秒で同じであるため、ダイバーは衝撃時に加速しています。

TI-Nspire ナビゲーターのオポチュニティ: クイック・ポーリング (オープン・レスポンス)
アクティビティのどの問題でも、学生の運動学の理解度をすばやく評価するのに最適な方法です。

教師からのアドバイス: このアクティビティでは、学生同士が話し合ったり、自分の考えをクラスで共有したりする時間がたくさんあることを知っておいてください。
ここでの目標は、微積分学における運動学を復習するだけでなく、議論を生み出すことです。