

関数の導関数の定義といろいろな導関数

教材について

- この教材は、IB Mathematics Approaches and Analysis SL/HL のカリキュラムに沿ったものです。
- これは、IB Mathematics Content Topic 5 Calculus に該当します。

5.6a x^n , $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\ln x$ の導関数。

5.12b 第一原理からの導関数の定義

その結果、学生は次のことを行います。

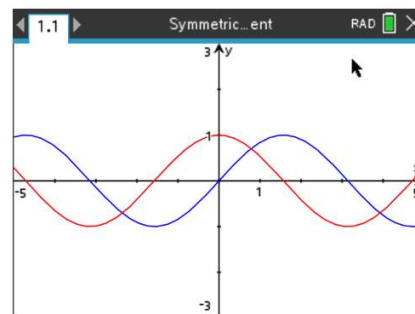
- 関数としての導関数のアイデアを発展させる。
- いくつかの一般的な導関数式に関する証拠の収集
- 数値的およびグラフィカルな調査を使用して推測を形成します。

語彙

- 微分
- 対称差分商

教師の準備とメモ

- 学生はこのアクティビティを個別に完了することができますが、少人数のグループで作業するとき起こるディスカッションから恩恵を受ける場合があります。
学生は、グラフ作成ハンドヘルドのテーブル機能を使用して、多くの点で対称差分商を調べることにより、サイン、コサイン、自然対数、および自然指数関数の導関数を調査します。
- 離散領域上の各点で微分の近似を繰り返して、微分近似関数を構築することで、微分を関数として捉え考えることへの活動に繋がります。
- 学生は、関数のグラフをグラフ化および変更(ズーム、トレースなど)し、グラフ作成ハンドヘルドで表を生成できる必要があります。
- このアクティビティは、ある時点での導関数が調査された後に行う必要があります。
- 学生は、同じ手法を使用して他の導関数を調査していく必要があります。
- 学生は、対称差分商は単にある点で導関数を近似するだけであり、導関数を見つける形式的なプロセスよりも正確である可能性があることを思い出す必要があるかもしれません。



技術的なヒント:

- このアクティビティには、TI-Nspire CX II ハンドヘルドから取得した画面キャプチャが含まれます。また、TI-Nspire ソフトウェアや TI-Nspire アプリなど、TI-Nspire 製品ファミリーでの使用にも適しています。ハンドヘルド以外の技術を使用する場合は、これらの方向を若干変更する必要があります。
- 使用している特定のテクノロジーに関する追加のテクニカルヒントをアクティビティ全体で確認してください。
- <http://education.ti.com/calculators/pd/US/Online-Learning/Tutorials> で無料のチュートリアルにアクセス

関連資料:

- いくつかの一般的な Functions_Student-Nspire.pdf の微分の調査
- いくつかの一般的な Functions_Student-Nspire.doc の微分の調査

関数の導関数の定義といろいろな導関数

- 学生は、最初は数値的証拠に基づいて導関数を予測するのに苦労するかもしれません。最初の質問は、彼らをプロセスに容易に参加させることを目的としています。

導関数について考える多くの方法の 1 つは、 x を入力として使用し、 x における f に接する線の傾きを返す関数です。関数の導関数は、多くの場合、使用および適用できる数式を持つ別の関数です。このアクティビティでは、多くの入力における瞬間的な変化率を（対称差分商を使用して）近似することにより、いくつかの一般的な関数の導関数を調査します。また、グラフ作成ハンドヘルドの表とグラフ作成機能も使用します。

このアクティビティ全体を通して、ハンドヘルドがラジアンモードになっていることを確認してください。

教師からのアドバイス：これは、ハンドヘルドのラジアンモードとディグリーモードの違いについて、学生の記憶をリフレッシュする良い機会かもしれません。また、対称差指数のトピックは、高レベルの数学のクラスで常に教えられるとは限らないため、このアクティビティを開始する前にいくつかの紹介が必要な場合があります。

1. (a) 方程式を入力します。
 - (b) 仮想斜面計を $f2(x)$ に組み込みます。このスロープファインダーは、対称差分商を使用します $f1(x) = \sin(x)$ ($h = 0.001$ の場合) を使用して、 $f1(x)$ に格納された関数の瞬時変化率を近似します。

- (c) これを次のように入力します。
$$f2(x): \frac{f1(x+0.001)-f1(x-0.001)}{0.002}$$

- (d) このスクリーンショットのように表を設定します。

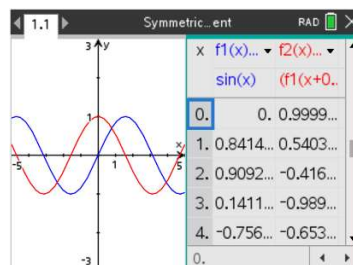
(注:ステップ=0.1)

- (e) テーブルを表示します。

- (f) 最初の列 (X) には入力値が含まれ、2 番目の列 ($f1(x)$) には対応する入力値 $f(x) = \sin(x)$ の出力が含まれます。

3 番目の列 ($f2(x)$) には、対応する入力値 $f(x) = \sin(x)$ での導関数の近似値が含まれます。

ここで、3 列目の値に近い出力を持つ一般的な関数を見つけてください。



関数の導関数の定義といろいろな導関数

解答：

1. (a) 方程式を入力します。

(b) 仮想斜面計を $f2(x)$ に組み込みます。このスロープファインダーは、対称差分商を使用します $f1(x) = \sin(x)$

($h = 0.001$ の場合) を使用して、 $f1(x)$ に格納された関数の瞬時変化率を近似します。

(c) これを次のように入力します。

$$f2(x) = \frac{f1(x+0.001) - f1(x-0.001)}{0.002}$$

(d) このスクリーンショットのように表を設定します。

(注: ステップ = 0.1)

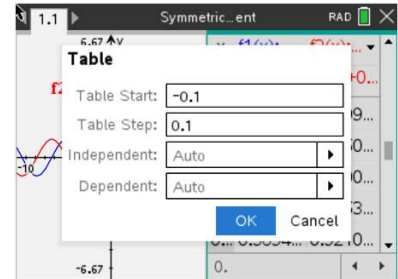
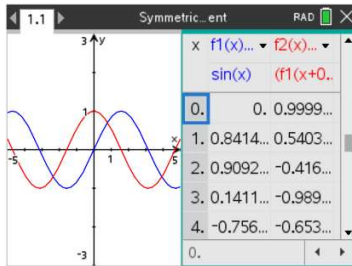
(e) テーブルを表示します。

(f) 最初の列 (X) には入力値が含まれ、2 番目の列 ($f1(x)$) には対応する入力値 $f(x) = \sin(x)$ の出力が含まれます。

3 番目の列 ($f2(x)$) には、対応する入力値 $f(x) = \sin(x)$ での導関数の近似値が含まれます。

ここで、3 列目の値に近い出力を持つ一般的な関数を見つけてください。

解答：



2. 表に $f2(x)$ の最大値を記載します。

$f2(x)$ の最小値を表に記載します。

解答： 最大値: 1; 最小値: -0.991

3. $f2(x)$ の最初の 3 つの正の根が該当する入力値を記述します。

解答： 1.5 ~ 1.6 (約 $\pi/2$)、4.7 ~ 4.8 (約 $3\pi/2$)、7.8 ~ 7.9 (約 $5\pi/2$)

関数の導関数の定義といろいろな導関数

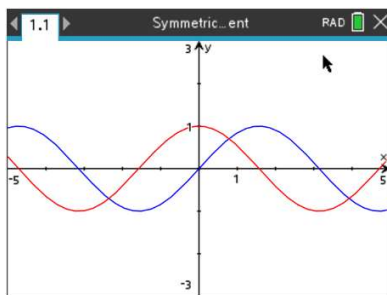
4. $f'(x)$ を予測する一般関数を述べます。

解答： $f'(x) = \cos(x)$

グラフ作成ハンドヘルドを使用して、 f のグラフと f の対称差分比率 ($f1(x)$ と $f2(x)$ のグラフ)を生成します。次の推奨ウィンドウ設定を使用します。

5. f の対称差分商のグラフが質問4で答えたものと似ているかどうかを記述してください。もしそうでなければ、関数 $f'(x)$ のグラフの新しい予測を述べて下さい。

解答：



1. (a) 方程式を入力します。

(b) 仮想斜面計を $f2(x)$ に組み込みます。このスロープファインダーは、対称差分商を使用します
 $f1(x) = \sin(x)$

(h = 0.001 の場合)を使用して、 $f1(x)$ に格納された関数の瞬時変化率を近似します。

(c) これを次のように入力します。 $f2(x): \frac{f1(x+0.001)-f1(x-0.001)}{0.002}$

(d) このスクリーンショットのように表を設定します。

(注:ステップ=0.1)

(e) テーブルを表示します。

(f) 最初の列 (X) には入力値が含まれ、2番目の列 ($f1(x)$) には対応する入力値 $f(x) = \sin(x)$ の出力が含まれます。

3番目の列 ($f2(x)$) には、対応する入力値 $f(x) = \sin(x)$ での導関数の近似値が含まれます。

ここで、3列目の値に近い出力を持つ一般的な関数を見つけてください。

関数の導関数の定義といろいろな導関数

問題点2 -

$f1(x) = \cos(x)$ として入力し、表を見てください。

7. $f'(x)$ の予測を述べます。説明する。

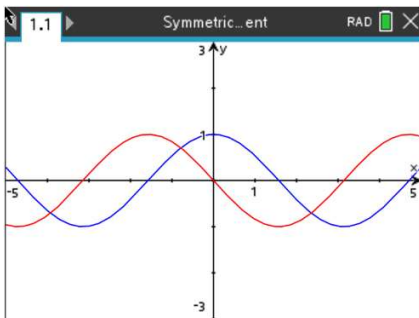
解答： $f'(x) = -\sin(x)$

対称差分商は、 $x = 0$ のときに0に近くなり、 x が1.5から1.6(約 $\pi/2$)になるまで減少することに注意してください。対称差分商は、 x が3.1と3.2(約 π)の間にあるときにも符号が変化します。これは、 $-\sin(x)$ の動作と似ています。

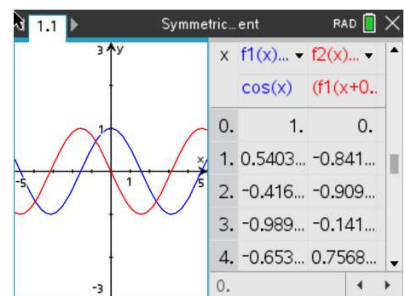
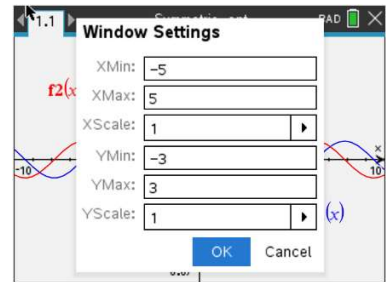
ハンドヘルドグラフを使用して、 f のグラフと f の対称差分比率($f1(x)$ と $f2(x)$)を生成します。

8. f の対称差分商のグラフが質問7で予想したグラフに似ているかどうか述べて下さい。

もしそうでない場合、 $f'(x)$ の新しい予測を述べます。
解答：



f の導関数の予測関数を $f3(x)$ に格納し、表を確認します。



関数の導関数の定義といろいろな導関数

9. $f'(x)$ の予測が対称差分商にどれだけ近いかを述べる。
一致する小数点以下の桁数を記述します。

解答: 通常、小数点以下 6 桁程度です。

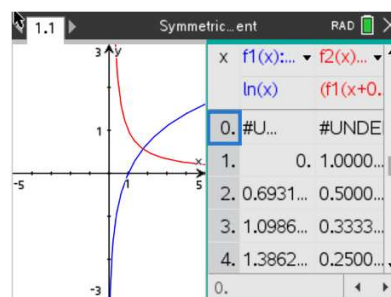
問題 3 –

$f_1(x) = \ln(x)$ として入力し、表を見てください。

10. $f'(x)$ の予測を述べます。説明する。
(ヒント: x と $f_2(x)$ の列を見てください。)

解答: $f(x) = \frac{1}{x}$
対称差分商は、常に x 列の逆数に近いように見えます。

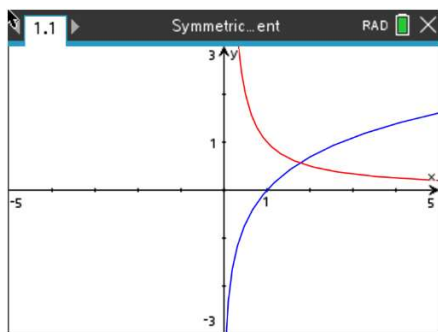
ハンドヘルドグラフを使用して、 f のグラフと f の対称差分比率
($f_1(x)$ と $f_2(x)$)を生成します。



11. f の対称差分商のグラフが質問10で予測した関数のグラフに似ているかどうかの述べて下さい。

そうでない場合は、 $f'(x)$ の新しい予測を述べます。

解答:



f の導関数の予測関数を $f_3(x)$ に格納し、表を確認します。

12. 予測が対称差分商に $f'(x)$ どれだけ近いかを述べます。
一致する小数点以下の桁数を記述します。

解答: 通常、小数点以下 6 桁程度です。

関数の導関数の定義といろいろな導関数

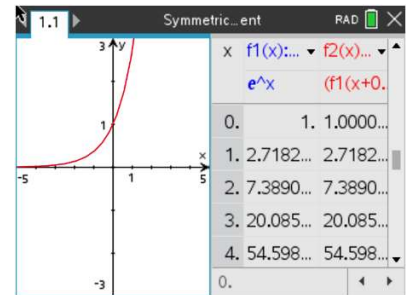
問題4 -

最後に、 $f_1(x) = e^x$ として入力し、表を見てください。

13. $f'(x)$ の予測を述べます。説明する。

解答: $f(x) = e^x$

$f_1(x)$ の列と $f_2(x)$ の列はほぼ同じように見えます。つまり、 f の値は対称差分商の値とほぼ一致します。



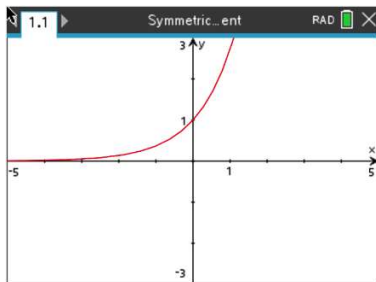
ハンドヘルドグラフを使用して、 f のグラフと f の対称差分比率($f_1(x)$ と $f_2(x)$)を生成します。

14. f の対称差分商のグラフが質問13で予測した関数のグラフに似ているどうかを述べて下さい。

もしそうでない場合、 $f'(x)$ の新しい予測を述べます。

解答:

はい、 f のグラフと対称差分商は実質的に区別できません。



f の導関数の予測関数を $f_3(x)$ に格納し、表を確認します。

15. $f'(x)$ の予測が対称差分商にどれだけ近いかを述べます。

一致する小数点以下の桁数を記述します。

解答: 通常、一致は小数点以下約5桁です。

関数の導関数の定義といろいろな導関数

チケット・アウト・ザ・ドア

16. この活動から学んだことをまとめた短い文章を書きます。
あなたが推測した導関数式すべてを含めます。

解答: 解答はさまざまです。学生は、正弦関数、余弦関数、自然対数関数、および自然指数関数の導関数の公式を開発するために、多くの点で対称差分指数を使用したことに言及する必要があります。彼らはこれらの式を述べるべきです。

***注: このアクティビティはテキサス・インスツルメンツが独自に開発し、IB 数学カリキュラムに沿っていますが、IB™が承認しているわけではありません。IB は、国際バカロレア機構が所有する登録商標です。*