# 境界領域と積分の定義

## 数学の目的

- 学生は、曲線と x 軸で囲まれた領域を見つけるアプリケーションの練習と議論を行います。
- 学生は、この情報を適用して、2 つの曲線で囲まれた領域を見つけます。
- 学生は、IB 数学と AP 微積分の両方、および最終評価でこれらのトピックを理解する方法と関連付けようとします。

## 語彙

- リーマン和
- 過小評価する
- 過大評価する
- 定積分
- 有界面積
- 凹面

## レッスンについて

- このレッスンでは、リーマン和の面積推定値を、曲線と x 軸の正確な有界面積と比較します。
- このレッスンは、IB Mathematics Applications and Interpretations SL / HL および IB Mathematics Approaches and Analysis SL / HL のカリキュラムに沿っています
- これは、IB Mathematics Core Content Topic 5 Calculus に該当します。

  5.5a 関数の反微分化としての積分と定積分と面積の関連

  5.5c 技術を用いた定積分と領域の面積

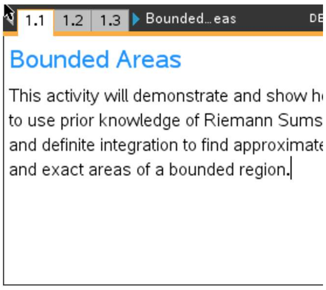
  　　$y = f(x)$ と x 軸で囲まれます。

  5.8 台形ルールを使用した面積の近似(IB AI のみ)

  5.11a/b 定積分と曲線間面積 (IB AA のみ)

- その結果、学生は次のことを行います。
  - この情報を実際の状況に適用します

教師からのアドバイス: 学生はこのアクティビティの前にリーマン和と定積分を確認しておくこと。




技術的なヒント:

- このアクティビティには、TI-Nspire CX ハンドヘルドから取得した画面キャプチャが含まれます。また、TI-Nspire ソフトウェアや TI-Nspire アプリなど、TI-Nspire 製品ファミリでの使用にも適しています。ハンドヘルド以外の技術を使用する場合は、これらの方向を若干変更する必要があります。
- 使用している特定のテクノロジーに関する追加のテクニカルヒントをアクティビティ全体で確認してください。
- http://education.ti.com/calculators/pd/US/Online-Learning/Tutorials で無料のチュートリアルにアクセス

レッスンファイル:

*学生の活動*

Bounded_Areas_Student-Nspire.pdf

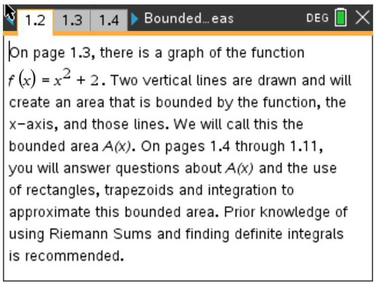
Bounded_Areas_Student-Nspire.doc

*TI-Nspire ドキュメント*

Bounded_Areas.tns

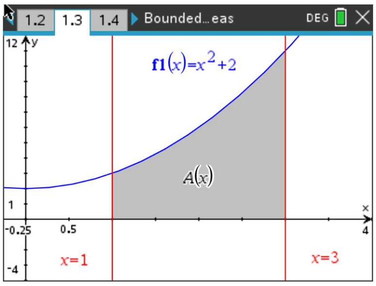
1.2 ページへ移動

このページでは、関数$f(x) = x^2 + 2$を例にして、x 軸、垂直線 x = 1 と x = 3 で囲まれた面積を求めることを説明します。まず、区間を 4 つに分割して、その左端を縦の長さとする長方形 4 つの合計の面積の場合(1.4)、右端の長方形(1.5)の場合、中点の長方形の場合(1.6)、台形の場合(1.7)の 4 通りで近似的に面積を求めます。



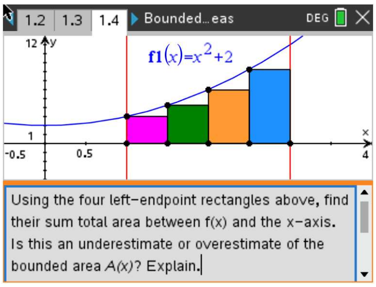

1.3 ページへ移動

これを境界領域 と呼び、この面積を$A(x)$とします。




1.4 ページへ移動

1. このページにある 4 つの左端の長方形を使用して、曲線と X 軸の間の合計面積を求めます。これが境界面積 A(x) の過小評価か過大評価かを示す。
 理由を説明して下さい。

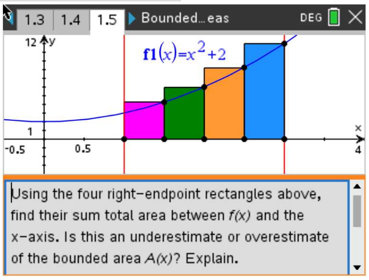



解答: 合計面積-10.75、これはグラフが増加しているため過小評価であり、左の合計は x 軸、f(x)、x = 1、および x= 3 の間の実際の境界面積の過小評価になります。

教師のヒント: 各長方形の面積を見つけるときは、底辺が各長方形の x 幅(0.5)であり、高さが f(左端の x 値)であることに注意して下さい。

1.5 ページへ移動

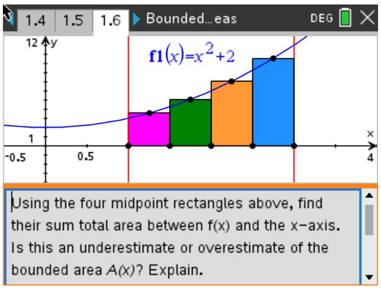
2. このページで提供されている 4 つの右端の長方形を使用して、曲線と x 軸の間の合計面積を求めます。これが境界面積$A(x)$の過小評価または過大評価であるかどうかを述べます。
 理由を説明して下さい。




解答: 合計総面積-14.75、これはグラフが増加しているため過大評価であり、正しい合計は x 軸、f(x)、x = 1、および x=3 の間の実際の境界面積の過大評価になります。

1.6 ページに移動します。

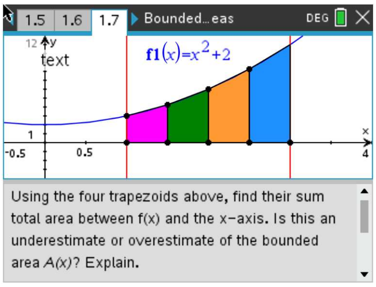
3.　このページにある 4 つの中点に長方形を使用して、曲線 $f(x)$と $x$ 軸の間の合計面積を求めます。
これは、境界領域$A(x)$の過小評価または過大評価です.理由を説明して下さい。




解答: 合計総面積-12.625、これはグラフが凹面になっているため過小評価であり、中点の合計は x 軸、f(x)、x = 1、および x = 3 の間の実際の境界面積$A(x)$の過小評価になります。

1.7 ページに移動します。

4.　このページで提供されている 4 つの台形を使用して、曲線と X 軸。これが有界面積$A(x)$の過小評価または過大評価であるかどうかを述べます。あなたの推論を説明して下さい。

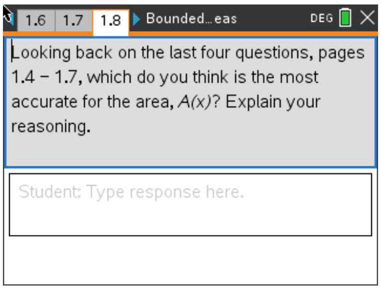



解答: 合計面積-12.75、これはグラフが凹面になっているため過大評価であり、台形の合計は x 軸、f(x)、x = 1、および x= 3 の間の実際の境界面積の過大評価になります。

教師のヒント: 台形式の面積を使用して、
A = 0.5(b1+ b2)h の場合、この場合の高さは各台形の x 幅(0.5)であり、底辺は f(左端の x 値) と f(右端の x 値)です。

1.8 ページに移動します。

5.　これら 4 つの質問を振り返ると、どれが境界領域$A(x)$にとって最も正確だと思いますか。
あなたの推論を説明する 。



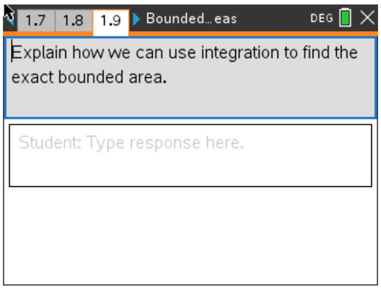

解答: 学生はまだ正確なエリアを見つけていないため、解答は異なる場合があります。違いは次のとおりです。

左端の合計:12.67 – 10.75 = 1.92 以下
右端の合計:12.67 – 14.75 = -2.08 以上
中点の合計:12.67 – 12.63 = 0.04 以下
台形の合計:12.67 – 12.75 = -0.08 以上

この場合の中点和が最も近いようです。

1.9 ページに移動します。

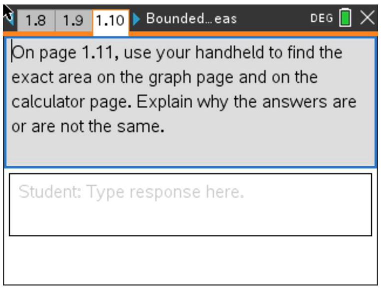
6.　クラスメートと一緒に、統合を使用して次のことを行う方法を説明する。
正確な境界領域を求めます。




解答: f(x) の定積分は、境界 x = 1 と x = 3 を使用して見つけることができます。これにより、曲線と x 軸の間の正確な領域が 1 から 3 の間で求められます。

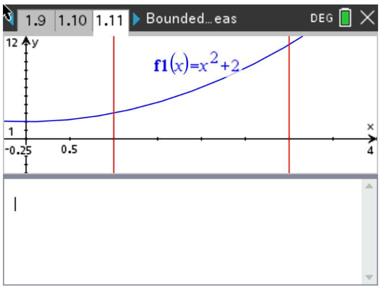
1.10 ページに移動します。

7. 1.11 ページで、ハンドヘルドのグラフページと電卓ページを使用して、その理由を説明します。答えは同じか、同じでないか。




解答：

グラフ:「メニュー>6グラフの分析>7積分」を選択し、点線をx = 1に移動し、タッチパッドの中央を押します。点線を x = 3 に移動し、タッチパッドの中央を押します。影付きの面積が境界領域です。




電卓:「メニュー>4微積分>3積分」を選択し、次に$x$に関して1と3の境界、f(x)の式を入力します。

有界領域の面積(定積分)= 12.67

## 延長

1.12 ページに移動します。

次の場合に何が起こるかについて互いに話し合います。

8. 代わりに関数が $f(x) = -x^2 + 2$

解答: 境界が同じ(x = 1 および x = 3)保たれている場合、領域の一部が x 軸より上に、一部が x 軸の下になることについて話し合う必要があります。また、関数が現在減少しており、どの合計が過大評価され、どの合計が過小評価されているかに影響を与える可能性があることも議論する必要があります。

9. 長方形/台形の数が 2 倍になりました。

解答: 学生は、長方形または台形の数が 4 から 8 になった場合、総面積がより正確になり、境界領域の実際の面積に近づくことについて話し合う必要があります。

10.　関数は $f(x) = -x^2 - 2$;

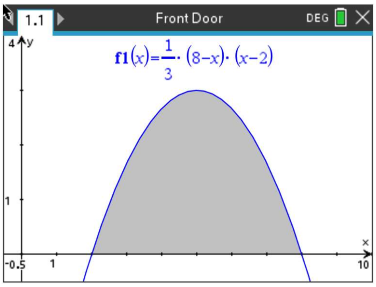
解答:  学生は、この関数は最初の 1.2 の関数 $f(x) = x^2 + 2$ と x 軸の対称であり、元の関数と同じ領域を示し、各解答の正反対であることについて話し合う必要があります。

11.　x 軸と垂直線はもはや関数 $f(x)$ の境界ではない。
次の関数 $g(x) = -x^2 + 4$ について、この領域をどのように見つけるかを説明してください。

解答:  これは、学生が使用してきた明確な積分が実際に 2 つの曲線間の面積を見つけることであったことを議論させる絶好の機会です。1 つ目は与えられた関数で、2 つ目は線 y = 0(x 軸)でした。次に、2 つの関数の減算を積分式の一部として設定し、交点を境界として議論することができます。

アプリケーション

ある夫婦は家を建てたいと思っています。そして、その家の玄関の形を工夫したいと思っていますが，標準的な長方形の出入り口が退屈だと感じていました。彼らの興味をそそった形の 1 つはアーチでした。ドアは、関数によってモデル化された影付きの領域です。




$f(x) = \frac{1}{3}(8-x)(x-2)$ は、x 軸と で囲まれています。

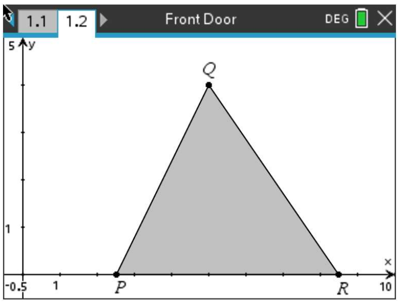
(a) 影付きの領域の積分を書き留めます。

解答： $\int_2^8 \frac{1}{3}(8-x)(x-2)\ dx$

(b) この影付きの領域の領域を見つけます。

解答:  面積= 12

この対応は常に三角形に魅了されてきました。以下は、三角形の入り口がどのように見えるかのレンダリングです。3 つの頂点は、P(0, 2.5)、Q(5, 4)、および R(c, 0) として与えられます。




(c)三角形の面積が部分(b)にある領域の面積に等しくなるように、R の $x$ 座標である c の値を見つけます。

解答: $12 = 0.5\ (c - 2.5)(4)$　$c = 8.5$

## まとめ

ディスカッションが終わったら、教師は学生が次のことを理解できるようにする必要があります。

- リーマン和を比較し、過大評価と過小評価を説明する方法。
- 定積分を見つけてリーマン和を推定と比較する方法。
- 境界領域を現実世界に適用する方法。

質問の例:

リーマン和関数を使うときに、より正確な答えを近似するために極限をどのように使うことができるかを簡単に説明します。

***注:このアクティビティはテキサス・インスツルメンツが独自に開発し、IB 数学カリキュラムに沿っていますが、IB™が承認しているわけではありません。IB は、国際バカロレア機構が所有する登録商標です。*