

微分の応用の具体例

数学の目的

- 学生には関連する料金が紹介されます。
- 学生は暗黙的に微分を使用して、関連するレートを実際の状況に適用します。
- 学生は、IB 数学コースでのこれらのトピックの理解方法と最終評価に関連付けようとしています。

語彙

- 関連レート
- 差別化
- 暗黙的
- 変化率

レッスンについて

- このレッスンは、IB Mathematics Applications and Interpretations HL および IB Mathematics Approaches and Analysis HL のカリキュラムに沿っています。
- これは、IB Mathematics Content Topic 5 Calculus に該当します。

AI HL 5.9: (a) 関連する変化率

5.14: (a) コンテキストからモデル/微分方程式を設定する

AA HL 5.14: (a) 暗黙的微分

(b) 関連増減率

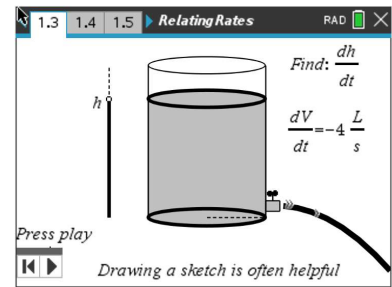
その結果、学生は次のことを行います。

- この情報を実際の状況に適用します。

このアクティビティでは、学生は、関連するレートのトピックを紹介するときに、導関数を見つけ、暗黙的な微分を使用する知識を応用することができます。いくつかの問題では、学生は2つの変数を持ち、どちらも時間とともに変化します。各問題では、特定の瞬間における1つの変数の変化率がわかり、学生は同じ瞬間における2番目の変数の変化率を見つける必要があります。

関連するレートを扱う際のプロセスをよりよく理解するために、いくつかの練習問題を実行しましょう。

ファイル **RelatingRates.tns** を開くと、このアクティビティをガイドし、便利なビジュアルを提供します。



技術的なヒント:

- このアクティビティには、TI-Nspire CX II ハンドヘルドから取得した画面キャプチャが含まれます。また、TI-Nspire ソフトウェアや TI-Nspire アプリなど、TI-Nspire 製品ファミリーでの使用にも適しています。ハンドヘルド以外の技術を使用する場合は、これらの方向を若干変更する必要があります。
- 使用している特定のテクノロジーに関する追加のテクニカルヒントをアクティビティ全体で確認してください。
- <http://education.ti.com/calculators/pd/US/Online-Learning/Tutorials> で無料のチュートリアルにアクセス

レッスンファイル:

学生の活動

RelatingRates-Student-Nspire.pdf

RelatingRates-Student-Nspire.doc

RelatingRates.tns(英語)

微分の応用の具体例

教師のヒント：ハンドヘルドにダウンロードするファイルがありますが、このアクティビティはそれなしで実行できます。このファイルは、関連するレートのトピックを理解しやすくする便利なビジュアルを提供します。

1.2 ページに移動します。

問題 1 - 例と説明

水は円筒形のタンクから 4 リットル/秒で排出されています。タンクの半径が 2 センチメートルの場合は、表面がどのくらいの速さで落ちているかを調べます。1.3 ページに移動して、タンクの排水の役立つビジュアルを確認してください。

ステップ 1: 変数を割り当て、与えられた情報をリストアップし、未知数を決定します。

- 変数:

解答: 高さ h 、半径 r 、体積 V 、時間 t

- 与えられた情報:

解答: $\frac{dV}{dt} = -4 \text{ L s}^{-1}, r = 2$

- 不明:

解答: $\frac{dh}{dt}$

1.4 ページに移動します。

ステップ 2: 円筒形タンクの所与と未知数に関する式を書きます。

解答: $V = \pi r^2 h$

1.5 ページに移動します。

ステップ 3: 方程式の両辺をステップ 2 から区別します。

t をクリックして、関連する料金を見つけます。

- この問題が商品ルールを使用して解決できるか、できないかを説明します。

解答: いいえ、 r は一定です

1.6 ページに移動します。

- 方程式を微分するには、陰的微分を使用します。あなたの作品を見せてください。

解答: $\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \cdot \frac{dh}{dt}$

1.7 ページに移動します。

微分の応用の具体例

ステップ 4: 評価する—尋ねられている質問を置き換えて答えます。

- 半径が 2 cm の場合のサーフェスの落下速度を求めます。

$$\text{解答: } \frac{-1000}{\pi} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

教師からのアドバイス: 学生は、音量が減っている場合、その割合がマイナスであることに気づくのに少し苦勞するかもしれません。また、自分が知っていることや見つけたいことに関連する適切な公式を覚えるのに苦勞しています。

2.1 ページに移動します。

問題 2 – 追加の例と説明

2 台の車が同時に出発し、1 台は 15 単位/時で東へ、もう 1 台は 8 単位/時間で北へ向かっています。東に向かう車が出発点から 30 単位のとくに、それらの間の距離がどのくらいの割合で増加しているかを調べます。2.2 ページに移動して、この状況の役立つビジュアルを確認してください。

ステップ 1: 変数を割り当て、与えられた情報をリストアップし、目標を決定します。

解答:

変数: x は東の距離、 y は北の距離、 z は車間の距離、 t は経過した時間数です。

$$\text{与えられた情報: } \frac{dy}{dt} = 8, \frac{dx}{dt} = 15$$

$$\text{ゴール: } x = 30 \text{ の場合 } \frac{dz}{dt}$$

2.3 ページに移動します。

ステップ 2: 既知のことと見つけたいことを関連付ける方程式を見つけます。

$$\text{解答: } x^2 + y^2 = z^2$$

2.4 ページに移動します。

ステップ 3: 方程式の両辺をステップ 2 から暗黙的に微分します。 t をクリックして、関連する料金を見つけます。

$$\text{解答: } 2x \cdot x' + 2y \cdot y' = 2z \cdot z'$$

ステップ 4: 代入して評価します。

- これらの主要な手順を示します。

$$\text{解答: } 2 \cdot 30 \cdot 15 + 2 \cdot 16 \cdot 8 = 2 \cdot 34 \cdot \frac{dz}{dt}$$

2.5 ページに移動します。

微分の応用の具体例

- 東に向かう車が出発点から 30 単位のとくに、それらの間の距離がどのくらいの割合で増加しているかを調べます。

解答: 17 ユニット

教師からのアドバイス: この質問に深みを加えるために、東に向かう車が実際に 60 単位離れたところから始まり、15 単位/時間で西に向かう場合、同じ答えが返ってくるかどうかを学生に尋ねます。その理由を説明してもらいます。

3.2 ページに移動します。

問題 3 - 練習/拡張

3.2 ページに移動します。

1.

球状の泡が吹き飛ばされています。体積は毎秒 9mm^3 の割合で増加しています。半径が 3mm のときに半径が増加する速度を求めます。3.3 ページに移動すると、役立つビジュアルが表示されます。

解答: $\frac{1}{4\pi} \text{ mm/sec}$

3.4 ページに移動します。

2. 粒子が曲線 $y = -0.5x^2 + 8$ に沿って移動し、 y の値が 1 秒あたり 2 単位の速度で減少します。

$x = 4$ のときに x がどのような速度で変化するかを調べます。

解答: 0.5 ユニット/秒の減少

3.5 ページに移動します。

3. 粒子が $\frac{dy}{dt} = 6$ となるカーブ上 $y = \frac{4}{(x+1)^2 + 3}$ を移動する。

$x = 2$ のとき、 t に対する x の瞬間的な変化率を調べます。

3.6 ページに移動すると、わかりやすいビジュアルが表示されます。

解答: -36

3.7 ページに移動します。

4. 2つの列車が同時に駅を出発し、1つの列車は時速 20 マイルで南下し、もう1つの列車は時速 33 マイルで西に向かいます。

3 時間後の列車間の距離の変化の速さを調べます。

解答: 時速約 28.83 マイル

微分の応用の具体例

3.8 ページに移動します。

5. 半径 3cm の円筒形タンブラーは、高さが 2.5cm/秒の割合で増加します。高さが 12.56cm の場合の円柱の体積の変化率を求めます。

3.9 ページに移動すると、役立つビジュアルが表示されます。

溶液: 70.686 mL/s

IB のさらなる申請

3.10 ページに移動します。

液体窒素に浸したバルーン。バルーンの直径は、冷却されると収縮します。球体の直径は 4 cm/s の割合で減少しています。

(a) 半径(r)で表面積の変化の方程式を求めます。

解答: $SA = 4\pi r^2$

$$\frac{dSA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

(b) 半径が 10 センチメートルの場合、表面積が変化する速度を求めます。

解答: $\frac{dd}{dt} = -4 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{dd}{dt} \right) = \frac{1}{2}(-4) = -2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\frac{dSA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt} = 8\pi(10)(-2)$$

$$= -160\pi \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

TI-Nspire ナビゲーターのオポチュニティ: クイック・ポーリング (オープン・レスポンス)
アクティビティのどの問題でも、関連する料金に対する学生の理解度をすばやく評価するための優れた方法です。

教師からのアドバイス: このアクティビティでは、学生同士が話し合ったり、自分の考えをクラスで共有したりする時間がたくさんあることを知っておいてください。ここでの目標は、関連する料金を導入してレビューするだけでなく、議論を生み出すことです。

**注: このアクティビティはテキサス・インスツルメンツが独自に開発し、IB 数学カリキュラムに沿っていますが、IB™ が承認しているわけではありません。IB は、国際バカロレア機構が所有する登録商標です。