

無限大の極限

数学の目的

- 無限大の「極限」を取ることを理解します。
- 混沌や振動による境界の発生を防ぐ行動の理解を深めます。
- グラフと値の表から制限を推定します。
- 最終動作、水平方向の漸近線、無限遠における極限のアイデアを結び付けます。
- 学生は、IB 数学のコースと最終評価でこれらのトピックを理解する方法と関連付けようとします。

語彙

- 制限
- 無限大
- 漸近線

レッスンについて

- このレッスンは、IB Mathematics Applications and Interpretations SL / HL および IB Mathematics Approaches and Analysis SL / HL のカリキュラムに沿っています
- これは、IB Mathematics Content Topic 5 Calculus に該当します。

5.1 (AI/A SL/HL):

(a) 制限の概念の紹介。

5.12 (AA HL のみ):

(b) 限界の理解(収束と発散)

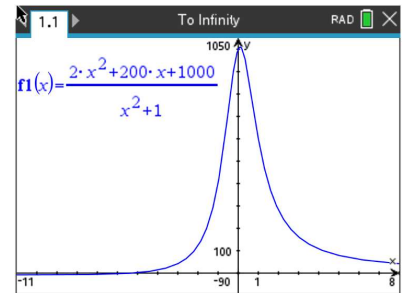
その結果、学生は次のことを行います。

- この情報を実際の状況に適用します。

関数の制限は、入力値が特定の値に近づくにつれて出力値が近づく動作です。出力値が無制限に増加または減少し続ける場合にも、制限が調べられます。この場合、表記は $\lim_{x \rightarrow \infty}()$ であり、

「入力値が無限大に近づくときの極限」と読み替えられます。この制限は、関数が 1 つの出力値に向かって移動するときに存在し、1 つの値に向かって移動しない場合は存在しません。

このアクティビティは 3 つのパートに分かれています。まず、入力が無限大に近づくときの関数の動作をグラフィカルおよび数値的に調べます。次に、入力値が特定の値に近づき続けるにつれて、出力動作が混沌としているために存在しない制限をグラフィカルに調べます。最後に、さまざまな極限問題を検討します。



技術的なヒント:

- このアクティビティには、TI-Nspire CX II ハンドヘルドから取得した画面キャプチャが含まれます。また、TI-Nspire ソフトウェアや TI-Nspire アプリなど、TI-Nspire 製品ファミリーでの使用にも適しています。ハンドヘルド以外の技術を使用する場合は、これらの方向を若干変更する必要があります。
- 使用している特定のテクノロジーに関する追加のテクニカルヒントをアクティビティ全体で確認してください。
- <http://education.ti.com/calculators/pd/US/Online-Learning/Tutorials> で無料のチュートリアルにアクセス

レッスンファイル:

学生の活動

無限大と Beyond_Student-Nspire.pdf へ

無限大と Beyond_Student-Nspire.doc へ

無限大の極限

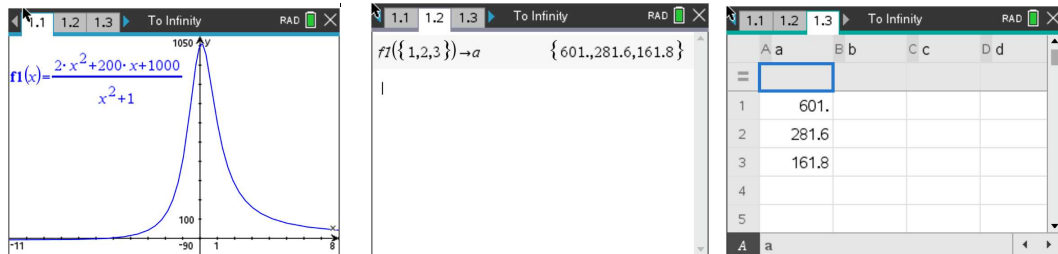
教師からのアドバイス: 学生は、電子ユーティリティの不正確な性質と、精度の限界に達したときに何が起きるかを理解する必要があります。グラフや値の表を手動やハンドヘルドで操作できる必要があります。

教師のヒント: 学生は無限大を関数で代入する実際の値と誤解することが多いため、注意が必要です。また、グラフ作成ハンドヘルドを精度の限界を超えて押し出し、結果を誤って解釈することで、無限大を誤って推定する可能性もあります。

課題 1

この関数 $f_1(x)$ を関数バーに入力します。
$$f(x) = \frac{2x^2+200x+1000}{x^2+1}$$

- (a) 入力 {1, 2, 3} の関数値を記録します。 解答: {601, 281.6, 161.8}
- (b) 次に示すように、出力値をリストに格納します。

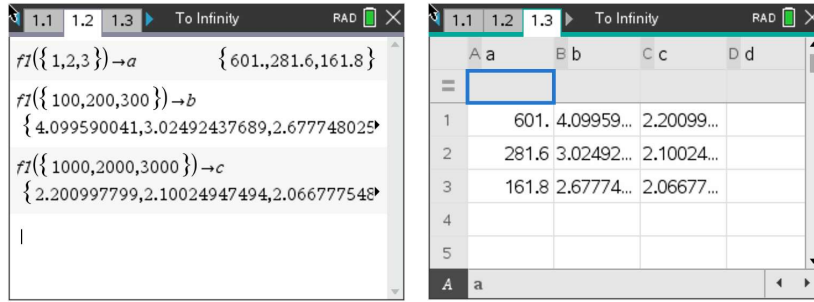


テクニカルヒント: Nspire でこの問題を始める前に、グラフページ、電卓ページ、リストとスプレッドシートのページの 3 つのページを開いてもらいます。リストとスプレッドシートのページ a、b、c、d の最初の 4 列にラベルを付けてもらいます。

- (c) 入力値 {100, 200, 300} に対してこのプロセスを繰り返します。出力値を b に格納し、値を記録します。
解答: {4.0996, 3.0249, 2.6777}
- (d) 入力値 {1000, 2000, 3000} に対してこのプロセスを繰り返します。出力値を c に格納し、値を記録します。
解答: {2.201, 2.1002, 2.0668}
- (e) クラスメートと一緒に、3 つのセットすべての値を見て、関数の動作に関する結論を導き出します。

考えられる議論: 答えはさまざまですが、データは 2 の値に近づいているようです。

無限大の極限



(f) 結論を確認するには、入力値 $\{10^{10}, 10^{15}, 10^{20}\}$ を試し、結果を記録します。

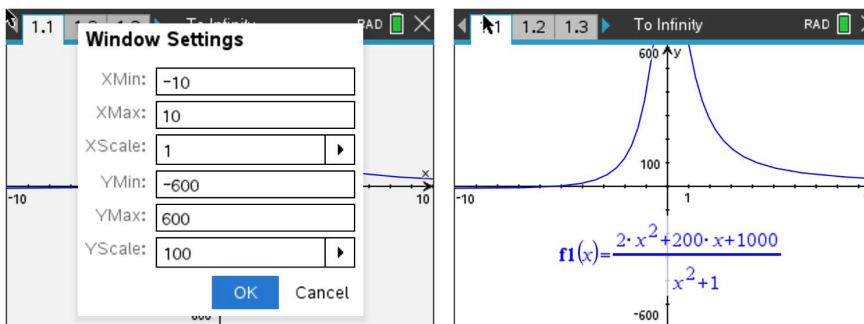
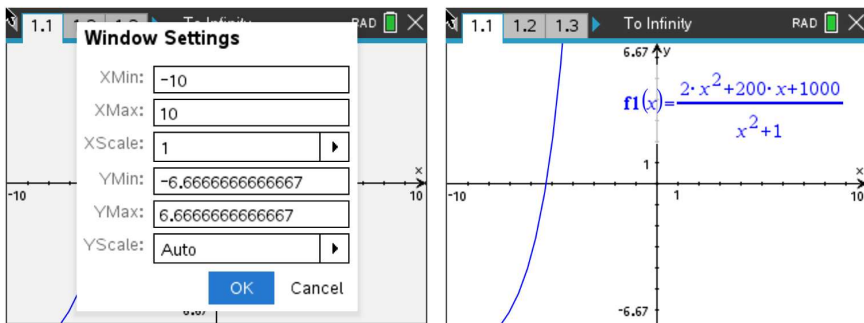
解答： $\{2.00000002, 2, 2\}$

(g) クラスメートと、関数が実際に制限値の正確な値に達しているかどうかについて話し合います。これが妥当な結果であると思われる場合は、クラスや相手と共有します。

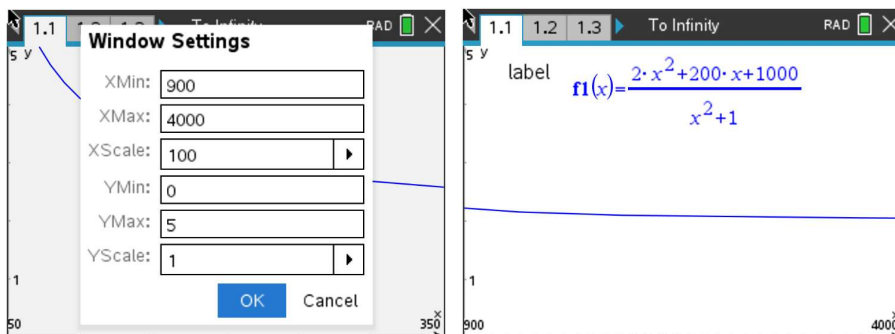
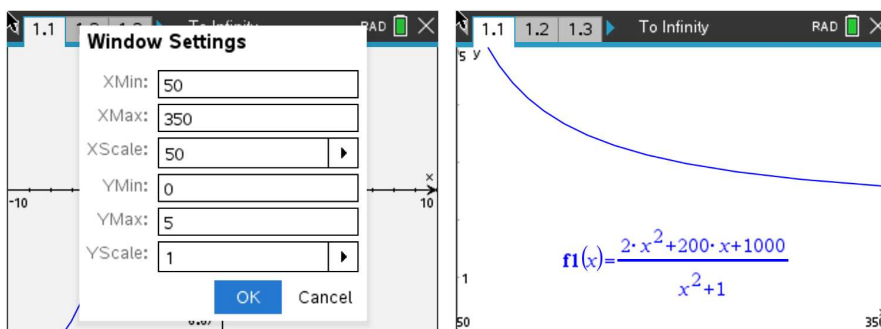
考えられる議論： 答えはさまざまです。だから、この質問は学生に「見える」と言わせています。ただし、関数が実際に値 2 に達することはありません。

教師からのアドバイス： $f(x)$ の値が実際に 2 であることと、グラフ作成ハンドヘルドの精度機能により 2 という値が生成されることを区別するように注意する必要があります。これは、等しい値と近似値について非常に詳しく議論するのに適した場所です。

(h) では、動作をグラフで見てください。数分かけて、パート a、c、d、f にリストされている入力値から動作を確認するために必要な表示ウィンドウを調べます。ハンドヘルドのウィンドウをクラスメートと比較し、気づいたことを話し合います。



無限大の極限



(i) 推計: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 200x + 1000}{x^2 + 1}$ 解答: 2

(j) クラスメートとともに、以下の限界について調査し、結論を導き出す。

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 200x + 1000}{x^2 + 1}$$

考えられる議論: 極限は 2 で、この関数は $y = 2$ の水平方向の漸近線を持ち、カーブが左右に近づくほど、値 2 に近づきます。

教師のヒント: 教師はここで、水平漸近線に関して以前のコースワーク(微積分学と代 2)といくつかのつながりを持たせたいと思うかもしれません。

課題 2

次に、問題 1 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ で行ったように制限を調査します。次の表に記入してください。

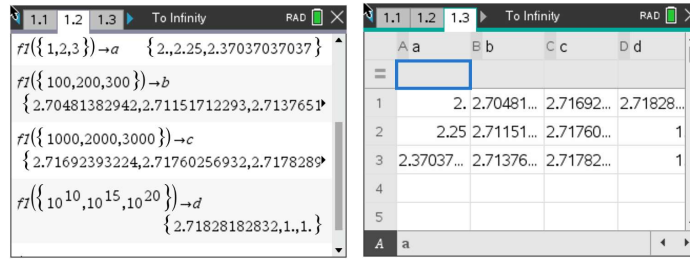
次の入力値:

x	ある	x	b	x	c	x	d
1	2	100	2.7048	1000	2.7169	1010	2.71828
2	2.25	200	2.7115	2000	2.7176	1015	1
3	2.3704	300	2.7138	3000	2.7178	1020	1

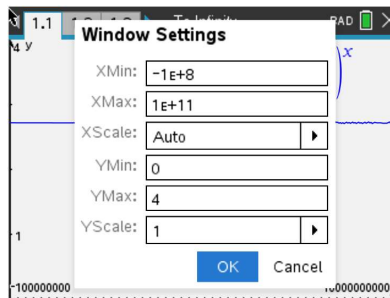
(a) クラスメートと、入力値が無限大に近づくにつれて気づいたことについて話し合います。

考えられる議論: 極限の値は e ですが、学生がそのような値を認識するかどうかは予想できません。
妥当な答えは 2.718 です。

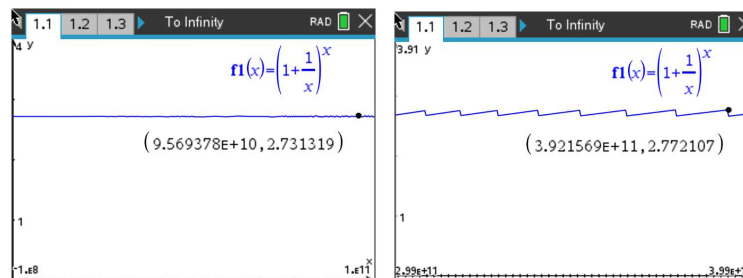
無限大の極限



- (b) 次の表示ウィンドウで、機能をグラフ化し、メニュー、トレース、グラフトレースを押します。これにより、トレースがカーブに配置されます。Esc キーを押すと、曲線上に点が残ります。点をつかんで右(無限大方向)に移動します。表示される内容を説明してください。



考えられる議論:



- (c) 限度を述べ、説明する。 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

考えられる議論: 制限の値は e ですが、期待できる場合と期待されない場合があります。

学生はそのような価値を認識するでしょう。妥当な答えは 2.718 ですが、ある時点で曲線は 2.718 の限界付近で振動し始め、 x の値を無限大で、特定の時点 $\frac{1}{x} =$ で制限は 1 になります(上のグラフを参照)。

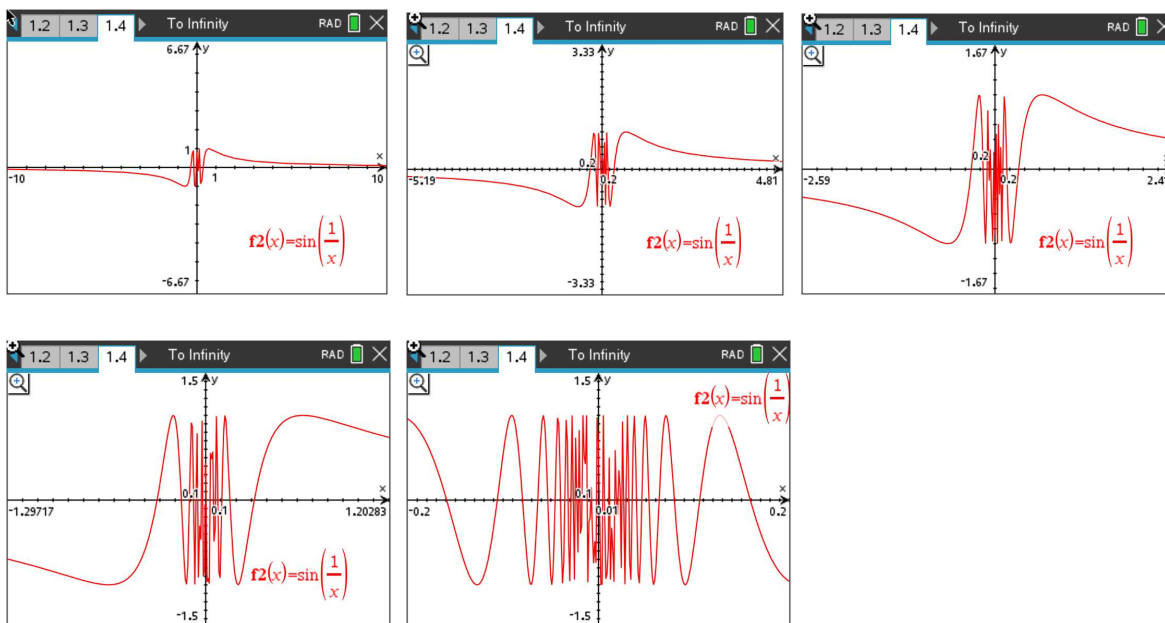
課題 3

制限を自分で練習する前に、もう 1 つの関数の動作を調べてみましょう。 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 標準ウィンドウを使用して、ハンドヘルドがラジアンメジャーとグラフであることを確認してください。標準ウィンドウを表示した後、 $f(x)$ メニュー、ウィンドウ/ズーム、ズームインを押して、原点を中心として 4 回ズームインします。

入力値が 0 に近づいたときに関数について気づいたことをクラスメートと話し合い、制限の結果を説明します。 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

無限大の極限

考えられる議論: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ は存在しません。無限大や負の無限大に近づくことはありませんが、関数は $x = 0$ で激しく振動し、単一の値に近づくことはありません (下の複数拡大グラフを参照)。



リミットの実践

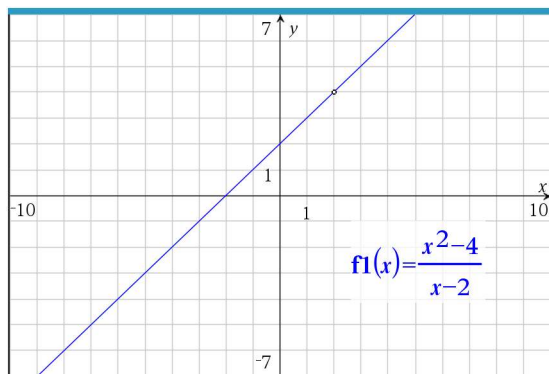
各式の制限を評価します。

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ 解答: 1
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{2x+5}$ 解答: $\frac{1}{2}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 解答: 制限は存在しません。
(0 はさまざまな側面からアプローチ)。
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{4x}$ 解答: $\frac{5}{4}$
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-1}{\sqrt{x^2+2}}$ 解答: -4
6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1}$ 解答: 3
7. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$ 解答: $\frac{1}{4}$

その他の IB アプリケーション

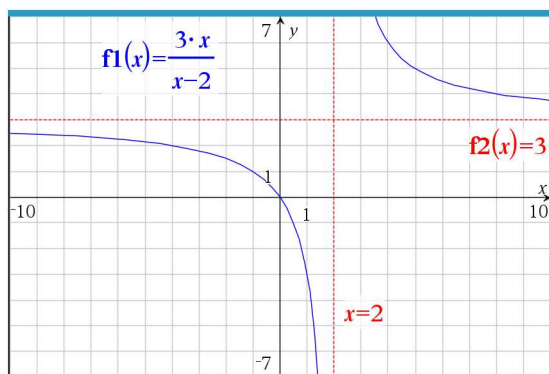
1. (a) グラフをスケッチします。 $y = \frac{x^2-4}{x-2}, x \neq 2$

無限大の極限



(b) 数値で検索します。 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ 解答: 4

2. (a) 関数について考えます。関数をスケッチします。 $f(x) = \frac{3x}{x-2}, x \neq 2$



(b) 限界を評価する: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x-2}$ 解答: 3

TI-Nspire ナビゲーターのオポチュニティ: クイック・ポーリング (オープン・レスポンス)
アクティビティのどの問題でも、学生の限界の理解度をすばやく評価するのに最適な方法です。

教師からのアドバイス: このアクティビティでは、学生同士が話し合ったり、自分の考えをクラスで共有したりする時間がたくさんあることを知っておいてください。ここでの目標は、制限を見直すだけでなく、議論を生み出すことです。

****注:**このアクティビティはテキサス・インスツルメンツが独自に開発し、IB 数学カリキュラムに沿っていますが、IB™が承認しているわけではありません。IB は、国際バカロレア機構が所有する登録商標です。