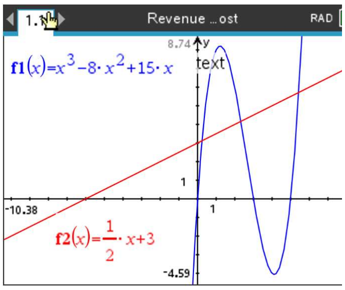
利益・収益・コストと微積分



数学の目的

- 学生はさらに、関数とその 1 次導関数と 2 次導関数、つまり利益関数との間のグラフィカルおよび代数的関係について説明します。
- 学生は、最適化の知識を使用して、利益を最大化したり、損失を最小限に抑えたりします。
- 学生は積分を使用して、変化率を考慮した利益関数を見つけます。
- 学生は、IB 数学のコースと最終評価でこれらのトピックを理解する方法と関連付けようとします。

語彙

- コスト
- 収益
- 最適化
- 利益
- 差別化
- 統合

レッスンについて

- 教材は，IB Mathematics Applications and Interpretations SL / HL および IB Mathematics Approaches and Analysis SL / HL のカリキュラムに沿っています
- これは、IB Mathematics Content Topic 5 Calculus に該当します。
  5.6b(AI のみ) の解法。$f'(x)=0$
  5.6c(AI のみ)　5.8a (AA のみ) ローカル最大ポイントと最小ポイント
  5.7(AI のみ) 5.8c (AA のみ) コンテキスト内の最適化問題。
  5.7a(AA のみ) 2 次導関数
  5.7b(AA のみ)$f, f', and\ f''$のグラフ間の関係を含む、関数のグラフィカルな動作。
- その結果、学生は次のことを行います。
  - この情報を実際の状況に適用します

このアクティビティを支援するために、利益は製造品目の収益から品目のコストを差し引いた値に等しいことを知っておく必要があります。言い換えると$p(x)=r(x)-c(x)$、
ここで、$p(x)$は利益関数、$r(x)$ は収益関数、$c(x)$はコスト関数です。
受講者は、関数とその一次導関数と二次導関数の関係をすでに知っている必要があります。

技術的なヒント:

- このアクティビティには、TI-Nspire CX II ハンドヘルドから取得した画面キャプチャが含まれます。また、TI-Nspire ソフトウェアや TI-Nspire アプリなど、TI-Nspire 製品ファミリでの使用にも適しています。ハンドヘルド以外の技術を使用する場合は、これらの方向を若干変更する必要があります。
- 使用している特定のテクノロジーに関する追加のテクニカルヒントをアクティビティ全体で確認してください。
- http://education.ti.com/calculators/pd/US/Online-Learning/Tutorials で無料のチュートリアルにアクセス

レッスンファイル:
学生の活動
Profit_Equations_and_Calculus_Student-Nspire.pdf
Profit_Equations_and_Calculus_Student-Nspire.doc

利益・収益・コストと微積分

復習

(a)企業が利益関数の第 1 導関数と第 2 導関数を使用して、商品の製造と販売を支援する方法についてクラスメートと話し合います。結果をクラスで共有します。

考えられる論点: 利益関数$p(x)$の変化率またはその一次導関数$p'(x)$を見つけることは、最大利益と最小損失を見つけるのに役立ちます。これは、$p'(x) = 0$の解を見つけることで実現できます。また$p''(x)$を使用して、どの解が最大値または最小値であるかを確認するためにも使用できます。

(b)　TI-Nspire CX II で、1 次導関数と 2 次導関数 (およびそれらのグラフ) を見つけて使用するさまざまな手法についてクラスメートと話し合います。結果をクラスで共有します。

考えられる論点: 多項式根ツールと微分関数の使用、微分関数のグラフ化と零点の検索、CAS バージョンの[実行]ツールの使用。

課題 1

アーマーガードはシルバーポリッシュを製造・販売しています。シルバーポリッシュの製造コストは、関数 $c(x) = \frac{1}{2}x + 3$　によってモデル化できます。

ここで、x はケースの数で、各ケースには 100 本のボトルが入っています。

収益は関数 $r(x) = x^3 - 8x^2 + 15x$ によってモデル化されます。

同社には、1 日あたり最大 1300 本のボトルを生産するのに十分な労働力があります。

(a)　コスト関数と収益関数の両方のドメインを記述します。

解: 両方の機能について、同社は最大 1300 本のボトル、つまり 1300 ユニットを生産できます。

$$0 \leq x \leq 13$$

(b)　グラフ化せずに、利益を最大化するために会社が製造すべきケースの数を見つけます。

解決策:　$p(x) = r(x) - c(x)$で、

$p'(x) = 0, p(x) = (x^3 - 8x^2 + 15x) - \left(\frac{1}{2}x + 3\right) = x^3 - 8x^2 + 14.5x - 3$

$p'(x) = 3x^2 - 16x + 14.5$,$0 = 3x^2 - 16x + 14.5$

これに対する解決策を見つけるには、平方根ツールを使用します。

$x_1 = 4.18,\quad x_2 = 1.16$ 、$p''(x) = 6x - 16$ 、$p''(4.18) > 0$

したがって、x_1で最小であり、x_2で最大であり、xは数百単位であるため、
利益を最大化するために必要な生産レベルは、シルバーポリッシュの 116 ボトルです。

$$p''(1.16) < 0$$

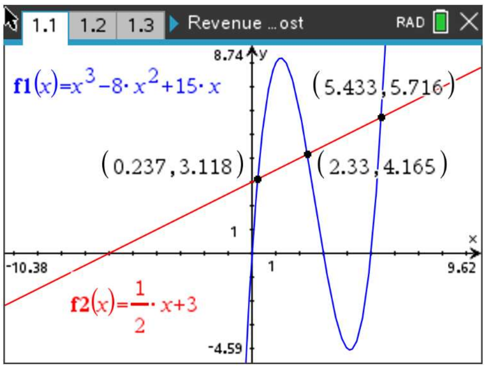
何年にもわたる開発を経て、同社は現在、1 日あたり 250 ケースを生産する方法を見つけました。

(c)　会社が利益を最小化する(または損失を最大化する)原因となるケースの数を見つけます。

解決策:　したがって、$p''(4.18) > 0$で　x_1は最小値であるため、
x =4.18で、利益関数pはその定義域に絶対最小値を持ちます。
損失が最大になる生産レベルは、シルバーポリッシュの 418 本です。

(d)　グラフユーティリティを使用して、コストと収益の関数をグラフ化し、会社が損益分岐点(つまり、生産レベルが$c(x) = r(x)$)になる場合に製造する必要があるケースの数を見つけます。

解答:　同社は約 24 ボトル、233 ボトル、および 543 ボトルのシルバーポリッシュで損益分岐点に達します。



(e)　労働者が生産できる数だけ多くのケースを生産することは、会社の利益を最大化しない。グラフを使ってその理由を説明しましょう。

解決策: コストが増加し続けているにもかかわらず、会社の収益は減少します。これは、シルバーポリッシュのボトルがあまりに多くないため、すべてを販売することができないためかもしれません。

課題 2　Best Buds は年次株主総会で、イヤフォンの製造コストは$c(x) = 3x + 1$ように
モデル化されると述べました。
これらのイヤフォンを製造による収益は 関数$r(x) = 40x + 12x^2 - x^3$ によってモデル化されます
ここで、xはイヤフォンのバッチ数を表し、各バッチは 100 本単位で表します。
利益を最大化するイヤフォンの数を見つけ、最大の利益を数百ドル単位で決定します。

解答: $p(x) = r(x) - c(x)$で、$p'(x) = 0$

$$p(x) = (40x + 12x^2 - x^3) - (3x + 1) = -x^3 + 12x^2 + 37x - 1$$
$$p'(x) = -3x^2 + 24x + 37$$

$0 = -3x^2 + 24x + 37$

$x = 9.32, -1.32$

$p''(9.32) < 0$ したがって、最大 $x = 9.32$ または 932 のイヤフォン

最大利益:577 数百または 57,700 ドル

<u>延長</u>

ある商品の生産に対する会社の利益の変化率を与えられたら、その会社の利益関数を見つけることができるでしょうか? アクティビティのこの最後の問題では、この状況を探ります。

考えられる論点: 積分によって利益関数を見つけることができます。

課題 3

Snow Shifters は、シャベルを製造および販売しています。
数千ドル単位の同社の利益$P(x)$は、月に生産されるシャベルの数に基づいて変化します。

シャベルの生産による利益の変化率は、$\frac{DP}{dx} = -4x + 15$ によってモデル化されます。
ここでxはシャベルが生産する数 (単位:数百)です。

同社は、4 (100) 個のシャベルを生産すると、18 (1000 ドル) の利益を上げます。

(a) $P(x)$の式を求める。

解答:

$p(x) = \int(-4x + 15)\,dx = -2x^2 + 15x + c$ を解くので、$x = 4,$ のとき$y = 18$だから、

$18 = -2(4)^2 + 15(4) + c$ から$c = -10$ $\quad p(x) = -2x^2 + 15x - 10$

(b) 年の特定の時期に、会社は生産を増やす能力を持っています。生産量を 5 個(百単位)以上、最大 6 個 (百単位) 個に増やした場合に、利益がどのように変化するかを説明して下さい。

解答: 彼らの利益は減少します。 利益関数Pについて、減少しているか、勾配が負であるか、
または変化率が負であるためです。

又は $\int_5^6(-4x + 15)\,dx = -7$ 又は 発見：$P(5) = 15$、$P(6) = 8$

<u>さらなる議論</u>

コース終了時の評価の準備として、試験の一部は電卓を使用して行われ、一部は電卓なしで行われます。このアクティビティをガイドとして使用し、クラスメートと話し合い、アクティビティ全体で使用された各方法のリストを作成し、電卓を使用する場合と使用しない場合の方法を説明します。各方法には、テクノロジーを使用する場合と使用しない場合で複数の方法があることを忘れないでください。各プロセスを検証する方法について時間をかけて話し合います。結果をクラスで共有します。

利益・収益・コストと微積分

考えられる論点:

ここには多くの議論のポイントがあります。デリバティブを手作業で見つけることは必須ですが、ハンドヘルドを使用する場合と使用しない場合の解決策を見つけることは、年末の評価について話し合い、確認するための優れた方法です。

TI-Nspire ナビゲーターのオポチュニティ: クイック・ポーリング (オープン・レスポンス)

$f(-7) = 5$、$f'(x) = 4 - 6x$を考えるて、 $f(x)$ を見つけます。

教師からのアドバイス: このアクティビティでは、学生同士が話し合ったり、自分の考えをクラスで共有したりする時間がたくさんあることを知っておいてください。ここでの目標は、微積分学の利益方程式を復習するだけでなく、議論を生み出すことです。

***注:このアクティビティはテキサス・インスツルメンツが独自に開発し、IB 数学カリキュラムに沿っていますが、IB™が承認しているわけではありません。IB は、国際バカロレア機構が所有する登録商標です。*